Balance : Une famille de contraintes

Emilie Picard-Cantin

Christian Bessiere, Emmanuel Hebrard, Zeynep Kiziltan, Claude-Guy Quimper, George Katsirelos, Toby Walsh

Université Laval

11 avril 2014

Table des matières

Qu'est-ce que Balance ?

- Contrainte sur le nombre d'occurences des valeurs
- But : Distribution équilibrée des valeurs aux variables
- Application : Balancement des charges de travail (confection d'horaires)

Domaine et assignation

Assignation

Attribution à chaque variable d'une valeur de son domaine.

Nombre d'occurrences

Nombre de fois qu'une valeur v est assignée à une variable. On note $\text{occ}(v)$.

Exemple

Variable $X_{e,j}$: tâche faite par l'employé e au jour j

Valeurs possibles : , , 

Domaine : qualifications de l'employé

Contraintes

Contrainte (notée C)

Relation sur un ensemble de variables $\mathcal{X}$.

Satisfaction d'une contrainte C

Une assignation satisfait C si l'ensemble des valeurs attribuées respectent la relation définie par C.

Exemple

$$C = AllDifferent(X_{1,j}, X_{2,j}, X_{3,j})$$

$$\Updownarrow$$

Pour jour j : occ() $= 1$, occ() $= 1$, occ() $= 1$

Filtrage de domaine

Cohérence de domaine

Lorsque toutes les valeurs des domaines contribuent à une solution potentielle (solution qui respectent les contraintes).

Infaisabilité

Non existance de solutions potentielles

Propagation de contraintes

Procédure visant à éliminer dans les domaines les valeurs ne contribuant à aucune solution potentielle.

Balance

Définition

$$\textsc{Balance}([X_1, \dots, X_n], B) \iff$$
$$B = \max_{v \in \{X_1, \dots, X_n\}} \mathrm{occ}(v) - \min_{v \in \{X_1, \dots, X_n\}} \mathrm{occ}(v)$$

Exemple

	L	M	MR	J	V	S	D
Robert							

occ() = 0, occ() = 5, occ() = 2

$$B = \max - \min = 5 - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad B \in [3, 3]$$

Balance*

Définition

$$\textsc{Balance}^*(\mathcal{V}, [X_1, \ldots, X_n], B) \iff$$
$$B = \max_{v \in \mathcal{V}} \mathrm{occ}(v) - \min_{v \in \mathcal{V}} \mathrm{occ}(v)$$

Exemple

	L	M	MR	J	V	S	D
Robert							

occ() = 0, occ() = 5, occ() = 2

$$B = \max - \min = 5 - 0 = 5 \quad \Rightarrow \quad B \in [5, 5]$$

AtMostBalance

Définition

$$\textsc{AtMostBalance}([X_1, \ldots, X_n], B) \iff$$
$$B \geqslant \max_{v \in \{X_1,\ldots,X_n\}} \operatorname{occ}(v) - \min_{v \in \{X_1,\ldots,X_n\}} \operatorname{occ}(v)$$

Exemple

	L	M	MR	J	V	S	D
Robert							

occ() = 0, occ() = 5, occ() = 2

$$B \geqslant \max - \min = 5 - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad B \in [3, 7]$$

AtMostBalance*

AtMostBalance*

$$\text{AtMostBalance}^*(\mathcal{V}, [X_1, \ldots, X_n], B) \iff$$
$$B \geqslant \max_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{occ}(v) - \min_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{occ}(v)$$

Exemple

	L	M	MR	J	V	S	D
Robert							

occ() = 0, occ() = 5, occ() = 2

$B \geqslant \max - \min = 5 - 0 = 5 \quad \Rightarrow \quad B \in [5, 7]$

AtLeastBalance

Définition

$$\textsc{AtLeastBalance}([X_1, \ldots, X_n], B) \iff$$
$$B \leqslant \max_{v \in \{X_1,\ldots,X_n\}} \operatorname{occ}(v) - \min_{v \in \{X_1,\ldots,X_n\}} \operatorname{occ}(v)$$

AtLeastBalance*

$$\textsc{AtLeastBalance}^*(\mathcal{V}, [X_1, \ldots, X_n], B) \iff$$
$$B \leqslant \max_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{occ}(v) - \min_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{occ}(v)$$

Résultats

	Original	Étoile
BALANCE	NP-difficile	polynomial
ATMOSTBALANCE	NP-difficile	polynomial
ATLEASTBALANCE	polynomial	polynomial

Définitions

Décomposition

Éclatement d'une contrainte en contraintes plus simples.

Motivation

- (+) Contraintes incluses dans les solveurs
- (+) Contraintes simples et optimisées
- (-) Manque de filtrage globale

Global Cardinality Constraint

Formulation

$$\mathrm{GCC}([x_1, \ldots, x_n], [O_1, \ldots, O_m])$$

Contrainte

$\mathrm{GCC}([x_1, \ldots, x_4], [O_1, \ldots, O_4])$ telle que

$X_1 \in \{1, 2\}$ $X_2 \in \{2, 3\}$ $X_3 \in \{2, 3\}$ $X_4 \in \{3, 4\}$

$O_1 \in [0, 2]$ $O_2 \in [1, 1]$ $O_3 \in [0, 1]$ $O_4 \in [1, 2]$

Solution satisfaisant la contrainte

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 2 \quad X_3 = 3 \quad X_4 = 4$$

Première décomposition (GCC)

Rappel

$$\textsc{Balance} \iff B = \max_{v \in \{X_1,\ldots,X_n\}} \mathrm{occ}(v) - \min_{v \in \{X_1,\ldots,X_n\}} \mathrm{occ}(v)$$

$$\textsc{Balance}^* \iff B = \max_{v \in \mathcal{V}} \mathrm{occ}(v) - \min_{v \in \mathcal{V}} \mathrm{occ}(v)$$

Décomposition Balance

$\mathrm{GCC}([X_1, \ldots, X_n], [O_1, \ldots, O_m])$

$P = \max(\{O_1, \ldots, O_m\})$

$Q = \min(\{O_1, \ldots, O_m\} \setminus \{0\})$

$B = P - Q$

Décomposition Balance*

$\mathrm{GCC}([X_1, \ldots, X_n], [O_1, \ldots, O_m])$

$P = \max(\{O_1, \ldots, O_m\})$

$Q = \min(\{O_1, \ldots, O_m\})$

$B = P - Q$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$

Domaines des $X_1, \ldots, X_6$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 5]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 4]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$

Domaines des $X_1, \ldots, X_6$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [0,6]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,6]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,5]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,6]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,4]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [0,6]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [0,6]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,6]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,6]$

$$P = \max(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 5]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 4]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 5]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$

$$P = \max(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 5]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 4]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 5]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$

$$Q = \min(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 5]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 4]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 5]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 2]$

$$Q = \min(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 5]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 4]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 5]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 2]$

$$B = P - Q = 1$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [0,6]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,6]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,5]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,6]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,4]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [0,6]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [1,3]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,6]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,2]$

$$B = P - Q = 1$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 5]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 4]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 3]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 2]$

$$P = \max(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 3]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 3]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 3]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 2]$

$$P = \max(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [0,6]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,6]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,6]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [0,6]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [1,3]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,6]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,2]$

$$O_1 + O_2 + O_3 = 6$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [0,6]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,6]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,6]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [0,6]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [1,3]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,6]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,2]$

$$O_1 + O_2 + O_3 = 6$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [1, 3]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [1, 3]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 3]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 2]$

$$Q = \min(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [0, 6]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [0, 6]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [1, 3]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [0, 6]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [1, 3]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [0, 6]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [1, 3]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [0, 6]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [1, 2]$

$$Q = \min(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [0,6]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,6]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,6]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [0,6]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [1,3]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,6]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$

$$B = P - Q = 1$$

Exemple pour Balance*

Problème initial		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [0,6]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [0,6]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [0,6]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [0,6]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [0,6]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$

$$B = P - Q = 1$$

Exemple pour BALANCE* - Suite

Résultat après propagation (rappel)

$X_1 \in \{1\}$	$X_4 \in \{2,3\}$	$B \in [1,1]$	$O_1 \in [1,2]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$O_2 \in [1,3]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$O_3 \in [1,3]$

- Puisque $O_1 + O_2 + O_3 = 6$, $\{O_1, O_2, O_3\} = \{1,2,3\}$ ou $\{O_1, O_2, O_3\} = \{2,2,2\}$
- Puisque $B = P - Q = 1$, aucune de ces possibilités n'est une solution !

Contraintes redondantes

Rappels

$$P = \max(\{O_1, \ldots, O_m\}) \qquad Q = \min(\{O_1, \ldots, O_m\})$$

Bornes sur P

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \leqslant P \leqslant \frac{n + (m-1)B}{m}$$

Bornes sur Q

$$\frac{n + (m-1)B}{m} \leqslant Q \leqslant \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

Borne supérieure sur P

Démonstration

$$n = (m-1)Q^* + P^* \qquad (P^* = \max P, Q^* = \min Q)$$

$$P^* = n - (m-1)Q^*$$

$$P \leqslant n - (m-1)Q^* \qquad (P \leqslant P^*)$$

$$P \leqslant n - (m-1)Q \qquad (Q \geqslant Q^*)$$

$$P \leqslant n - (m-1)(P-B) \qquad (B = P - Q)$$

$$P + (m-1)(P-B) \leqslant n$$

$$mP - (m-1)B \leqslant n$$

$$P \leqslant \frac{n + (m-1)B}{m}$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$	
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [1, 3]$	
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [1, 3]$	
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [2, 3]$	
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [1, 2]$	

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$

$$P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m} \qquad P \leqslant \frac{6+2B}{3}$$

$$\Rightarrow P \leqslant \frac{8}{3} \qquad \Rightarrow P \leqslant 2$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,2]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$

$$P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m} \qquad P \leqslant \frac{6+2B}{3}$$

$$\Rightarrow P \leqslant \tfrac{8}{3} \qquad \Rightarrow P \leqslant 2$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,2]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$

$$B = P - Q = 1$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,2]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,1]$

$$B = P - Q = 1$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1, 1]$
$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$	$X_2 \in \{1, 2\}$	$O_1 \in [1, 2]$
$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [1, 3]$	$X_3 \in \{2, 3\}$	$O_2 \in [1, 3]$
$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [1, 3]$	$X_4 \in \{2, 3\}$	$O_3 \in [1, 3]$
$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [2, 3]$	$X_5 \in \{2, 3\}$	$P \in [2, 2]$
$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [1, 2]$	$X_6 \in \{2, 3\}$	$Q \in [1, 1]$

$$P = \max(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,2]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,2]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,2]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,1]$

$$P = \max(\{O_1, O_2, O_3\})$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,2]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,2]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,2]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,1]$

$$O_1 + O_2 + O_3 = 6$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [2,2]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [2,2]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [2,2]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,2]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,1]$

$$O_1 + O_2 + O_3 = 6$$

Exemple pour BALANCE* avec $P \leqslant \frac{n+(m-1)B}{m}$

Exemple précédent		Résultat	
$X_1 \in \{1\}$	$B \in [1,1]$	$X_1 \in \{\}$	$B \in [1,1]$
$X_2 \in \{1,2\}$	$O_1 \in [1,2]$	$X_2 \in \{\}$	$O_1 \in [\,]$
$X_3 \in \{2,3\}$	$O_2 \in [1,3]$	$X_3 \in \{\}$	$O_2 \in [\,]$
$X_4 \in \{2,3\}$	$O_3 \in [1,3]$	$X_4 \in \{\}$	$O_3 \in [\,]$
$X_5 \in \{2,3\}$	$P \in [2,3]$	$X_5 \in \{\}$	$P \in [\,]$
$X_6 \in \{2,3\}$	$Q \in [1,2]$	$X_6 \in \{\}$	$Q \in [\,]$

$O_1 + O_2 + O_3 = 6$ Impossible !

Nécessité d'un algorithme de filtrage

Motivation

- Insuffisance des décompositions
- Un algorithme dédié permet d'assurer le filtrage.

Points négatifs

- Nécessite la gestion de tous les cas spéciaux.
- Souvent gourmant en temps d'exécution
- Complexe à intégrer dans un solveur

Ensemble de Hall

Exemple précédent

$\text{GCC}([x_1, \ldots, x_4], [O_1, \ldots, O_4])$ telle que

$$X_1 \in \{1,2\} \quad X_2 \in \{2,3\} \quad X_3 \in \{2,3\} \quad X_4 \in \{3,4\}$$

$$O_1 \in [0,2] \quad O_2 \in [1,1] \quad O_3 \in [0,1] \quad O_4 \in [1,2]$$

Ensemble de Hall

Soit $H = \{2,3\} \subset \mathcal{V}$. Alors,

- $dom(X_2), dom(X_3) \subseteq \{2,3\}$
- $\max(\text{occ}(2)) + \max(\text{occ}(3)) = 2$
- H est saturé

Ensemble de Hall - Suite

Notation

- $\lceil H \rceil$: nombre maximal de variables qui peuvent être assignées aux valeurs contenues dans H
- $C(H)$: Nombre de variables dont le domaine est inclus dans H.

Définition formelle

Un ensemble de Hall est un ensemble $H \subseteq D$ tel qu'il y a $\lceil H \rceil$ variables dont le domaine est inclus dans H, i.e. H est un ensemble de Hall SSI

$$C(H) = \lceil H \rceil.$$

Ensemble «instable»

Exemple précédent

$GCC([x_1, \dots, x_4], [O_1, \dots, O_4])$ telle que

$$X_1 \in \{1,2\} \quad X_2 \in \{2,3\} \quad X_3 \in \{2,3\} \quad X_4 \in \{3,4\}$$

$$O_1 \in [0,2] \quad O_2 \in [1,1] \quad O_3 \in [0,1] \quad O_4 \in [1,2]$$

Ensemble «instable»

Soit $U = \{4\} \subset \mathcal{V}$. Alors,

- $dom(X_4) \cap \{4\} \neq \emptyset$
- $\min(\mathrm{occ}(4)) = 1$
- U est sous-saturé

Ensemble «instable» - Suite

Notation

- $\lfloor U \rfloor$: nombre minimal de variables qui doivent être assignées à une valeur de U
- $I(U)$: Nombre de variables dont le domaine intersecte les valeurs de U

Définition formelle

Un ensemble «instable» est un ensemble $U \subseteq D$ tel qu'il y a le même nombre de variables dont le domaine intersecte U que la capacité minimale de U, i.e. U est «instable» SSI

$$I(U) = \lfloor U \rfloor.$$

Algorithme - $O(n^2 m)$

1. Trouver une solution potentielle pour ATMOSTBALANCE* telle que la balance est minimale
2. Poser $q = \min_{v \in \mathcal{V}} \mathrm{occ}(v)$
3. Filtrer $\mathrm{GCC}([\mathrm{D}(X_1), \ldots, \mathrm{D}(X_n)], [O_1, \ldots, O_m])$ où $O_i \in [q, q + \max(B)] \quad \forall i$
4. Si aucune valeur n'est filtrée, toutes les valeurs contribuent à une solution potentielle pour ATMOSTBALANCE*.
5. Si une valeur est filtrée, alors on reprend l'étape 3 avec
   - $O_i \in [q + 1, q + \max(B) + 1] \quad \forall i$ si $\exists$ un ensemble de Hall
   - $O_i \in [q - 1, q + \max(B) - 1] \quad \forall i$ si $\exists$ un ensemble «instable»

Mise en situation

Contexte

- Problème d'attribution de tâches (horaire)
- m tâches par jour
- m employés, un employé par tâche
- Sur n jours

Modèle

- Variable $X_{e,j}$: la tâche de l'employé e et jour j
- Valeurs : les m tâches

Mise en situation - Suite

Contraintes

- ALL-DIFFERENT sur les variables $[X_{1,j}, \ldots, X_{m,j}] \quad \forall j$
- Nous minimisons la balance B pour chaque employé e avec ATMOSTBALANCE* sur $[X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}]$.

Variables

- 5 à 8 employés, tâches (m)
- 16 à 20 jours (n)

Indisponibilités

Ratio d'indisponibilité $\alpha \in [0.1, 0.58]$ par bond de 0.02 ($\lceil \alpha n^2 m \rceil$ valeurs aléatoires)

Résultats

m	n	Dec.				Dec. + ICs			
		#	B	Time	Bkt	#	B	Time	Bkt
6	16	8	1.84	6379	84037	**25**	**1.8**	36	454
6	17	11	**2.07**	58305	1032467	**25**	**2.07**	75	1080
6	18	16	3.07	8528	159756	**25**	**1.76**	123	1830
6	19	8	3.11	101926	1300577	**25**	**2.53**	584	6715
6	20	7	2.92	2214	26769	**25**	**2.69**	875	9642
7	16	6	**1.38**	31289	458507	**25**	**1.38**	2271	28623
7	17	9	1.96	153645	1482708	**25**	**1.88**	8093	87193
7	18	3	2.26	130366	1384302	22	1.69	18685	227569
7	19	4	1.96	77535	773561	22	1.8	21136	221469
7	20	2	2.61	24788	279260	**23**	**1.5**	44488	577341
8	16	8	2.03	123672	2028112	22	0.88	16750	222687
8	17	3	1.76	148253	1222789	21	1.61	53071	689295
8	18	1	1.69	3878	34588	15	**1.5**	54601	521468
8	19	2	2.03	169320	1611324	**24**	**1.34**	61610	639616
8	20	2	5.61	233559	2001984	11	2.65	49078	450619

Résultats

m	n	Dec. + ICs				DC Algorithm			
		#	B	Time	Bkt	#	B	Time	Bkt
6	16	**25**	**1.8**	36	454	**25**	**1.8**	**32**	**250**
6	17	**25**	**2.07**	75	1080	**25**	**2.07**	**35**	**240**
6	18	**25**	**1.76**	123	1830	**25**	**1.76**	**35**	**269**
6	19	**25**	**2.53**	584	6715	**25**	**2.53**	**59**	**393**
6	20	**25**	**2.69**	875	9642	**25**	**2.69**	**163**	**1044**
7	16	**25**	**1.38**	2271	28623	**25**	**1.38**	**1758**	**11907**
7	17	**25**	**1.88**	8093	87193	**25**	**1.88**	**1516**	**9018**
7	18	22	1.69	18685	227569	**24**	**1.61**	13385	87178
7	19	22	1.8	21136	221469	**23**	**1.69**	6133	35406
7	20	**23**	**1.5**	44488	577341	**23**	1.61	18050	111929
8	16	22	0.88	16750	222687	**25**	**0.42**	3651	14423
8	17	21	1.61	53071	689295	**25**	**1.23**	12404	65442
8	18	15	**1.5**	54601	521468	**16**	**1.5**	5062	15035
8	19	**24**	**1.34**	61610	639616	**24**	**1.34**	**29897**	**194079**
8	20	11	2.65	49078	450619	**15**	**2.23**	12168	50713

Conclusion

- Étude de contraintes visant à balancer des solutions
- Preuve qu'obtenir la cohérance de domaine sur la contrainte BALANCE est NP-difficile
- Introduction de nouvelles contraintes (BALANCE*, ATMOSTBALANCE, ATMOSTBALANCE*, ATLEASTBALANCE, ATLEASTBALANCE*)
- Construction d'un algorithme de filtrage
- Présentation d'une décomposition efficace
- Démonstration de l'avenir prometteur de ces méthodes de filtrage

Merci !