UNIVERSITÉ LAVAL

Jean-Samuel Leboeuf

avec LeBlanc et Marchand

Les arbres de décisions en tant que machines à partitionner

13 mars 2020

Apprentissage automatique

Données $\longrightarrow$ Modèle $\longrightarrow$ Prédictions

Apprentissage automatique

Données ⟶ Modèle ⟶ Prédictions

- Régression
- Classification

Apprentissage automatique

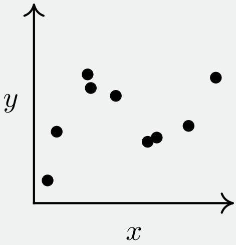
Données ⟶ Modèle ⟶ Prédictions

↑

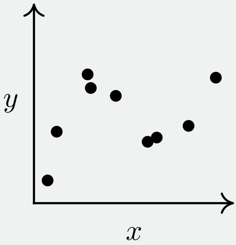
Classe de fonctions

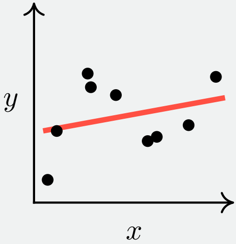
Prédictions :
- Régression
- Classification

Complexité d'une classe

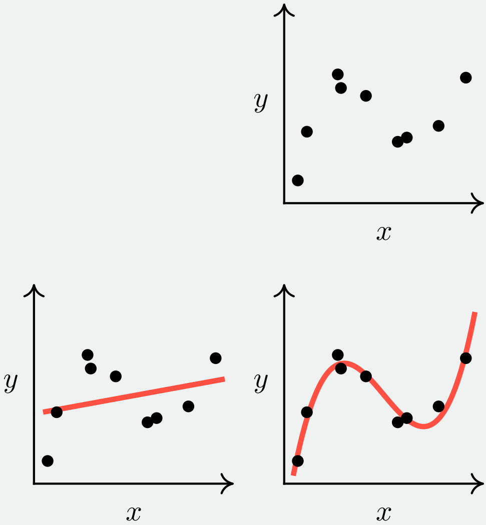


Complexité d'une classe

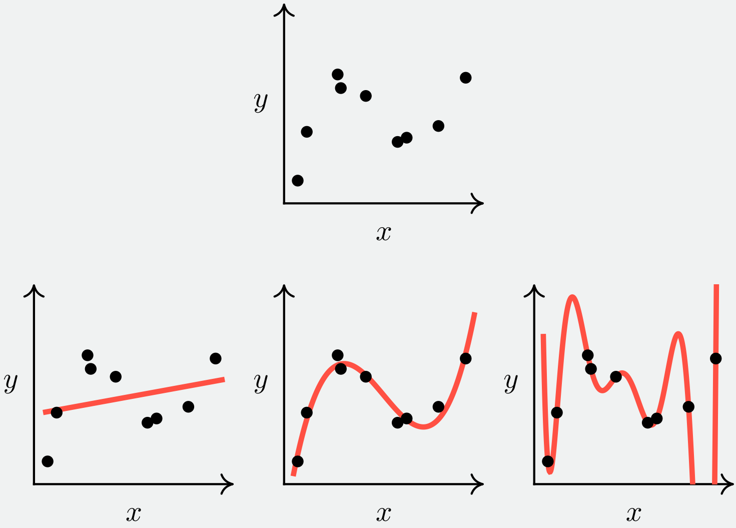




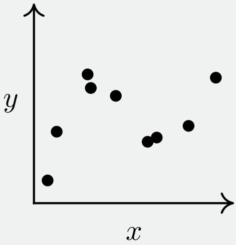
Complexité d’une classe

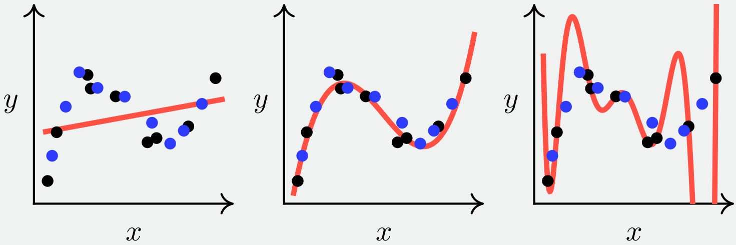


Complexité d'une classe

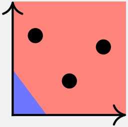


Complexité d'une classe

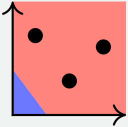


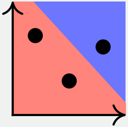


Pulvérisation

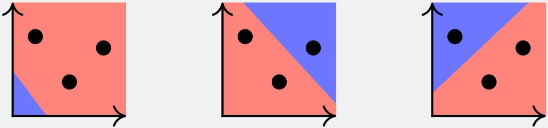


Pulvérisation

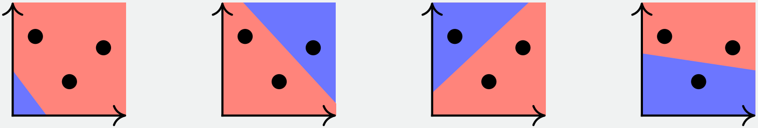




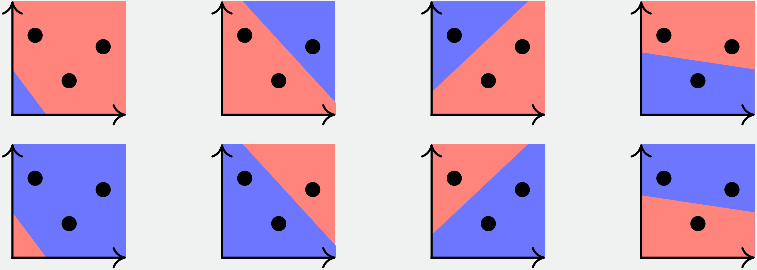
Pulvérisation



Pulvérisation

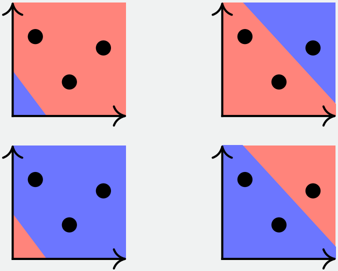


Pulvérisation

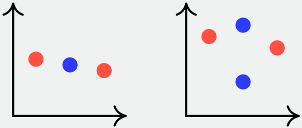


Les séparateurs linéaires en 2D pulvérisent cet échantillon.

Pulvérisation



Les séparateurs linéaires en 2D pulvérisent cet échantillon.



Les séparateurs linéaires ne pulvérisent *pas* ces échantillons.

Dimension VC

Vapnik et Chervonenkis (1971)

Soit $\mathscr{H}$ une classe d'hypothèses et S un échantillon :

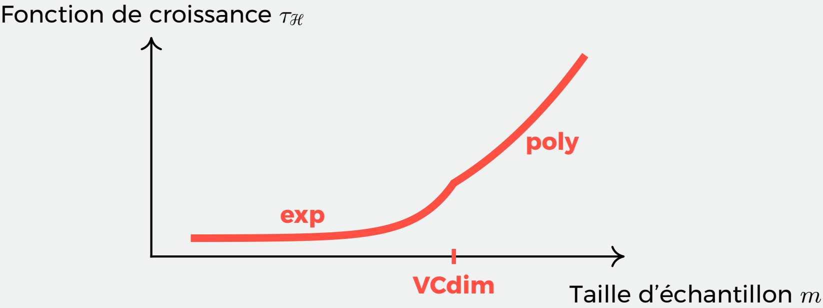
$$\mathrm{VCdim}\,\mathscr{H} \equiv \max_S \{|S| : \mathscr{H} \text{ pulvérise } S\}$$

$\mathrm{VCdim}\,(\text{sépateurs linéaires en 2D}) = 3$

Extension multiclasse : Dimension de Natarajan (1989)

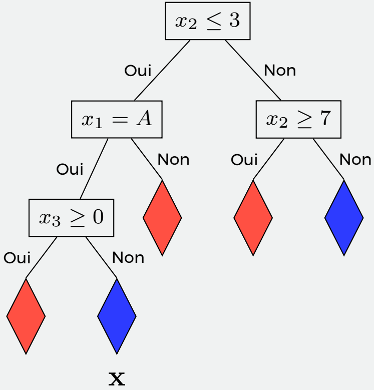
Fonction de croissance

$$\tau_{\mathcal{H}}(m) = \max_{S:|S|=m} \{|h(S)| : h \in \mathcal{H}\}$$

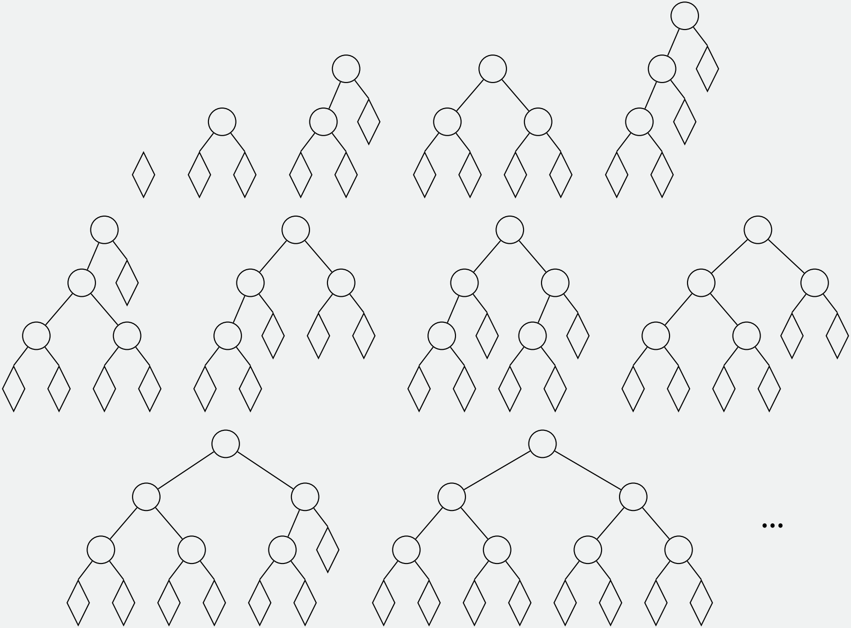


$$\mathrm{VCdim}\,\mathcal{H} = \max_{m} \{m : \tau_{\mathcal{H}}(m) = 2^m\}$$

Arbre de décision



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A \\ 3 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \quad \{A, B, C\} \\ \longrightarrow \quad \mathbb{N} \\ \longrightarrow \quad \mathbb{R} \end{array}$$



La VCdim des arbres

La VCdim des arbres

- Simon (1991) - VCdim des arbres de rang r sur attributs binaires

La VCdim des arbres

- Simon (1991) - VCdim des arbres de rang r sur attributs binaires
- Mansour (1997) - VCdim d'un arbre à N noeuds sur ℓ attributs binaires est en $\Omega(N)$ et $O(N \log \ell)$

La VCdim des arbres

- Simon (1991) - VCdim des arbres de rang r sur attributs binaires
- Mansour (1997) - VCdim d'un arbre à N noeuds sur ℓ attributs binaires est en $\Omega(N)$ et $O(N \log \ell)$
- Maimon et Rokach (2002) - VCdim des arbres *oblivious* sur des attributs binaires

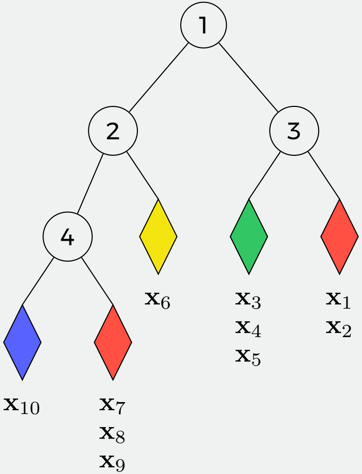
La VCdim des arbres

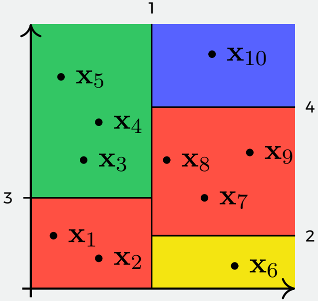
- Simon (1991) - VCdim des arbres de rang r sur attributs binaires
- Mansour (1997) - VCdim d'un arbre à N noeuds sur ℓ attributs binaires est en $\Omega(N)$ et $O(N \log \ell)$
- Maimon et Rokach (2002) - VCdim des arbres *oblivious* sur des attributs binaires
- Yildiz (2015) :
  - VCdim exacte des souches de décision sur ℓ attributs binaires ($\lfloor \log_2(\ell + 1) \rfloor + 1$)
  - Borne inférieure sur la VCdim de tout arbre pour tout type d'attributs

Peu de résultats sur les attributs à valeur réelle

Peu de résultats sur une borne supérieure

Machines à partitionner





$$\{\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}, \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}, \{\mathbf{x}_6\}, \{\mathbf{x}_{10}\}\}$$

Partitions

c-partition $\overline{\gamma}(S)$ d'un ensemble S :

- Ensemble de c sous-ensembles de S appelées *parts*
- Parts non-vides
- Union des parts égale S

Partitions

c-partition $\bar{\gamma}(S)$ d'un ensemble S :

- Ensemble de c sous-ensembles de S appelées *parts*
- Parts non-vides
- Union des parts égale S

Exemple de 3-partition :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \bar{\gamma}(S) = \{\{2, 5\}, \{3\}, \{1, 4\}\}$$

Pour une classe T d'arbre à structure fixe :

Pour une classe T d'arbre à structure fixe :

- $\mathscr{P}_T^c(S)$: Fonction qui compte le nombre de c-partitions réalisables par T sur un échantillon S.

Pour une classe T d'arbre à structure fixe :

- $\mathscr{P}_T^c(S)$: Fonction qui compte le nombre de c-partitions réalisables par T sur un échantillon S.
- $\pi_T^c(m) = \max_{S:|S|=m} |\mathscr{P}_T^c(S)|$: Fonctions de partionnement.

Pour une classe T d'arbre à structure fixe :

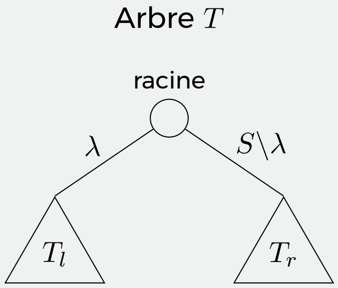
- $\mathscr{P}_T^c(S)$: Fonction qui compte le nombre de c-partitions réalisables par T sur un échantillon S.
- $\pi_T^c(m) = \max_{S:|S|=m} |\mathscr{P}_T^c(S)|$: Fonctions de partionnement.
- $\operatorname{VCdim} T = \max_m \left\{m : \pi_T^2(m) = 2^{m-1} - 1\right\}$

Pour une classe T d'arbre à structure fixe :

- $\mathscr{P}_T^c(S)$: Fonction qui compte le nombre de c-partitions réalisables par T sur un échantillon S.
- $\pi_T^c(m) = \max\limits_{S:|S|=m} |\mathscr{P}_T^c(S)|$: Fonctions de partionnement.
- $\operatorname{VCdim} T = \max\limits_{m} \left\{ m : \pi_T^2(m) = 2^{m-1} - 1 \right\}$

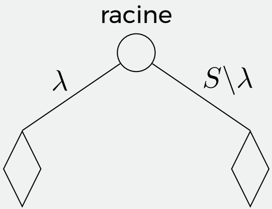
But : **Évaluer** $\pi_T^2(m)$.

Approche récursive



Approche récursive

Souche T

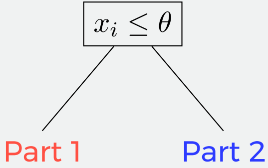


Souche de décision

Rappel : Évaluer le nombre de partitions réalisables

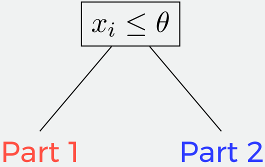
Souche de décision

Rappel : Évaluer le nombre de partitions réalisables



Souche de décision

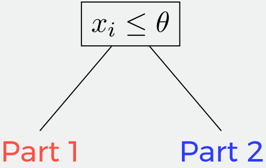
Rappel : Évaluer le nombre de partitions réalisables



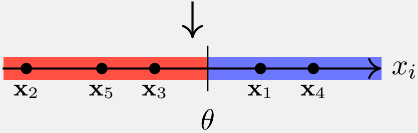
$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$$

Souche de décision

Rappel : Évaluer le nombre de partitions réalisables

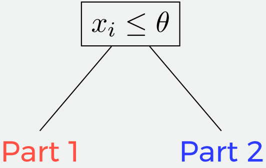


$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$$

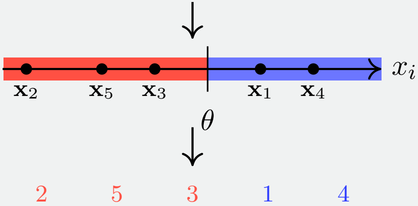


Souche de décision

Rappel : Évaluer le nombre de partitions réalisables

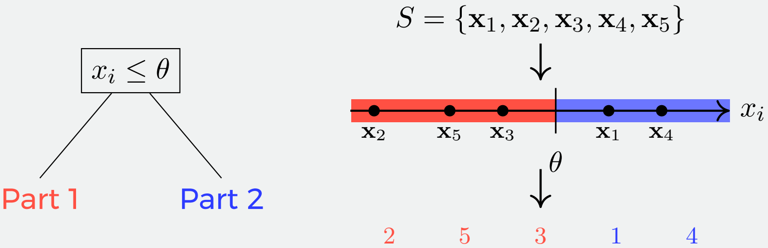


$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$$



Souche de décision

Rappel : Évaluer le nombre de partitions réalisables



Un attribut $\Leftrightarrow$ une permutation de $\{1, \ldots, m\}$

Une règle $\Leftrightarrow$ une partition

$$P(S) = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\text{indices des } m \text{ exemples}} \\ \ell \text{ attributs} \downarrow & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P(S) = \begin{array}{cc} & \text{indices des } m \text{ exemples} \longrightarrow \\ \ell \text{ attributs} \downarrow & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \longleftrightarrow \{\{2,3,5\},\{1,4\}\}$$

$$P(S) = \begin{array}{c c} & \xrightarrow{\text{indices des } m \text{ exemples}} \\ \ell \text{ attributs} \downarrow & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ {\color{red}3} & {\color{red}1} & {\color{red}5} & {\color{red}2} & {\color{blue}4} \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \longleftrightarrow \{\{1, 2, 3, 5\}, \{4\}\}$$

$$P(S) = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\text{indices des } m \text{ exemples}} \\ \ell \text{ attributs} \downarrow & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \longleftrightarrow \{\{1, 2, 3, 5\}, \{4\}\}$$

Naïvement,

$$\pi_T^2(m) \leq \ell(m-1).$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{indices des } m \text{ exemples} \longrightarrow \\
P(S) = \; \ell \text{ attributs} \downarrow & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\longleftrightarrow \{\{1,2,3,5\},\{4\}\} \\
\longleftrightarrow \{\{1,2,3,5\},\{4\}\} \\
\\
\end{array}
$$

Naïvement,

$$\pi_T^2(m) \leq \ell(m-1).$$

$$P(S) = \begin{array}{c c} & \xrightarrow{\text{indices des } m \text{ exemples}} \\ \downarrow \ell \text{ attributs} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \longleftrightarrow \{\{1,2,3,5\},\{4\}\} \\ \longleftrightarrow \{\{1,2,3,5\},\{4\}\} \\ \\ \end{array}$$

Naïvement,

$$\pi_T^2(m) \leq \ell(m-1).$$

Par simplicité, choisissons m impair.

Un attribut = 2 partitions avec une part de taille k :

$k = 1$:

$k = 2$:

Un attribut = 2 partitions avec une part de taille k :

$$k = 1 : \quad \left[\, 2 \,\middle|\, 5 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \,\right] \quad \& \quad \left[\, 2 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \,\middle|\, 4 \,\right]$$

$$k = 2 :$$

Un attribut = 2 partitions avec une part de taille k :

$$k = 1 : \quad [\ 2 \mid 5 \quad 3 \quad 1 \quad 4\ ] \quad \& \quad [\ 2 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \mid 4\ ]$$

$$k = 2 : \quad [\ 2 \quad 5 \mid 3 \quad 1 \quad 4\ ] \quad \& \quad [\ 2 \quad 5 \quad 3 \mid 1 \quad 4\ ]$$

Un attribut = 2 partitions avec une part de taille k :

$$k = 1 : \quad [\ 2 \mid 5\ \ 3\ \ 1\ \ 4\ ] \quad \& \quad [\ 2\ \ 5\ \ 3\ \ 1 \mid 4\ ]$$

$$k = 2 : \quad [\ 2\ \ 5 \mid 3\ \ 1\ \ 4\ ] \quad \& \quad [\ 2\ \ 5\ \ 3 \mid 1\ \ 4\ ]$$

Idem pour $k \leftrightarrow m - k$.

Un attribut = 2 partitions avec une part de taille k :

$$k = 1 : \quad \left[\ 2 \ \middle|\ 5 \quad 3 \quad 1 \quad 4\ \right] \quad \& \quad \left[\ 2 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \ \middle|\ 4\ \right]$$

$$k = 2 : \quad \left[\ 2 \quad 5 \ \middle|\ 3 \quad 1 \quad 4\ \right] \quad \& \quad \left[\ 2 \quad 5 \quad 3 \ \middle|\ 1 \quad 4\ \right]$$

Idem pour $k \leftrightarrow m - k$.

Donc,

$$\pi_T^2(m) \leq \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \min \left\{2\ell, \text{nombres de partitions avec une part de taille } k\right\}$$

Partitions avec une part de taille $1 : m$.

Partitions avec une part de taille $1 : m$.

$$\{\{1\}, \{2,3,4,5\}\}$$
$$\{\{2\}, \{1,3,4,5\}\}$$
$$\{\{3\}, \{1,2,4,5\}\}$$
$$\{\{4\}, \{1,2,3,5\}\}$$
$$\{\{5\}, \{1,2,3,4\}\}$$

(identiques aux partitions avec une part de taille $m-1$.)

Partitions avec une part de taille 1 : m.

Partitions avec une part de taille 2 : $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Partitions avec une part de taille $1 : m$.

Partitions avec une part de taille $2 : \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

$$\begin{array}{ll}
\{\{1,2\},\{3,4,5\}\} & \{\{2,4\},\{1,3,5\}\} \\
\{\{1,3\},\{2,4,5\}\} & \{\{2,5\},\{1,3,4\}\} \\
\{\{1,4\},\{2,3,5\}\} & \{\{3,4\},\{1,2,5\}\} \\
\{\{1,5\},\{2,3,4\}\} & \{\{3,5\},\{1,2,4\}\} \\
\{\{2,3\},\{1,4,5\}\} & \{\{4,5\},\{1,2,3\}\}
\end{array}$$

(identiques aux partitions avec une part de taille $m-2$.)

Partitions avec une part de taille 1 : m.

Partitions avec une part de taille 2 : $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

$$\vdots$$

Partitions avec une part de taille $k < \frac{m}{2}$: $\binom{m}{k}$.

(identiques aux partitions avec une part de taille $m - k$.)

Partitions avec une part de taille $1 : m$.

Partitions avec une part de taille $2 : \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

$$\vdots$$

Partitions avec une part de taille $k < \frac{m}{2} : \binom{m}{k}$.

Donc,

$$\pi_T^2(m) \leq \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \min \left\{ 2\ell, \binom{m}{k} \right\}$$

Partitions avec une part de taille $1 : m$.

Partitions avec une part de taille $2 : \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

$\vdots$

Partitions avec une part de taille $k < \frac{m}{2} : \binom{m}{k}$.

Donc,

$$\pi_T^2(m) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \min \left\{ 2\ell, \binom{m}{k} \right\}$$

Théoreme. Soit T la classe des souches de décision sur ℓ attributs à valeur réelle. Alors,

$$\pi_T^2(m) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \min \left\{ 2\ell, \binom{m}{k} \right\},$$

et nous avons l'égalité pour $2\ell \leq m$, pour $2\ell \geq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, et pour $1 \leq m \leq 7$.

VCdim des souches de décision

VCdim des souches de décision

Pour $2\ell \geq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, on a

$$\pi_T^2(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} = 2^{m-1} - 1$$

VCdim des souches de décision

Pour $2\ell \geq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, on a

$$\pi_T^2(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} = 2^{m-1} - 1$$

Pour $2\ell < \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, on a

$$\pi_T^2(m) < 2^{m-1} - 1$$

VCdim des souches de décision

Pour $2\ell \geq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, on a

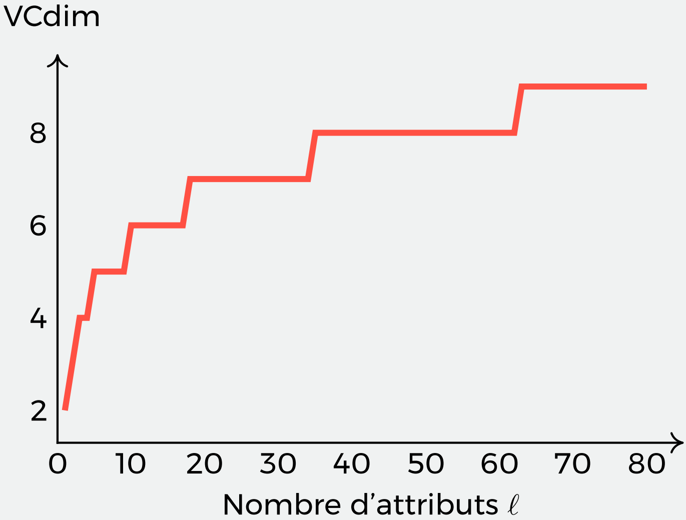
$$\pi_T^2(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} = 2^{m-1} - 1$$

Pour $2\ell < \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, on a

$$\pi_T^2(m) < 2^{m-1} - 1$$

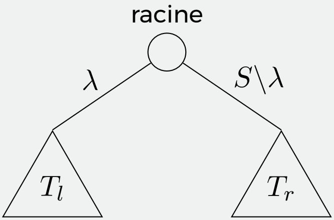
Donc,

$$\mathrm{VCdim}\,(T) = \max_m \left\{ m : 2\ell \geq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\} \in \Theta(\log \ell)$$


VCdim
8
6
4
2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Nombre d'attributs ℓ

Arbre quelconque

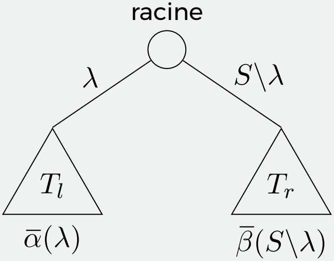
Arbre T



$$\longrightarrow \quad \bar{\gamma}(S) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_c\}$$

Arbre quelconque

Arbre T



$$\longrightarrow \quad \overline{\gamma}(S) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}$$

Supposons $|\bar{\gamma}| = 3$ et,

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
α_1	β_1
α_2	β_2

Les $\bar{\gamma}$ possibles sont :

Supposons $|\bar{\gamma}| = 3$ et,

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
α_1	β_1
α_2	β_2

Les $\bar{\gamma}$ possibles sont :

- $\bar{\gamma}_1 = \{\alpha_1 \cup \beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$

Supposons $|\bar{\gamma}| = 3$ et,

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
α_1	β_1
α_2	β_2

Les $\bar{\gamma}$ possibles sont :

- $\bar{\gamma}_1 = \{\alpha_1 \cup \beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$
- $\bar{\gamma}_2 = \{\alpha_1 \cup \beta_2, \beta_1, \alpha_2\}$

Supposons $|\bar{\gamma}| = 3$ et,

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
α_1	β_1
α_2	β_2

Les $\bar{\gamma}$ possibles sont :

- $\bar{\gamma}_1 = \{\alpha_1 \cup \beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$
- $\bar{\gamma}_2 = \{\alpha_1 \cup \beta_2, \beta_1, \alpha_2\}$
- $\bar{\gamma}_3 = \{\alpha_1, \alpha_2 \cup \beta_1, \beta_2\}$

Supposons $|\bar{\gamma}| = 3$ et,

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$
α_1	β_1
α_2	β_2

Les $\bar{\gamma}$ possibles sont :

- $\bar{\gamma}_1 = \{\alpha_1 \cup \beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$
- $\bar{\gamma}_2 = \{\alpha_1 \cup \beta_2, \beta_1, \alpha_2\}$
- $\bar{\gamma}_3 = \{\alpha_1, \alpha_2 \cup \beta_1, \beta_2\}$
- $\bar{\gamma}_4 = \{\alpha_1, \alpha_2 \cup \beta_2, \beta_1\}$

Proposition. Soit $\mathscr{Q}^c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ l'ensemble des $\overline{\gamma}$ avec c parts réalisables à partir de $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$. Alors,

$$\mathscr{P}^c_T(S) = \bigcup_{\{\lambda, S\setminus\lambda\}} \bigcup_{a,b} \mathscr{Q}^c\left(\mathscr{P}^a_{T_l}(\lambda), \mathscr{P}^b_{T_r}(S\setminus\lambda)\right) \cup \mathscr{Q}^c\left(\mathscr{P}^a_{T_l}(S\setminus\lambda), \mathscr{P}^b_{T_r}(\lambda)\right)$$

Proposition. Soit $\mathscr{Q}^c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ l'ensemble des $\overline{\gamma}$ avec c parts réalisables à partir de $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$. Alors,

$$\mathscr{P}_T^c(S) = \bigcup_{\{\lambda, S\setminus\lambda\}} \bigcup_{a,b} \mathscr{Q}^c\left(\mathscr{P}_{T_l}^a(\lambda), \mathscr{P}_{T_r}^b(S\setminus\lambda)\right) \cup \mathscr{Q}^c\left(\mathscr{P}_{T_l}^a(S\setminus\lambda), \mathscr{P}_{T_r}^b(\lambda)\right)$$

Borne supérieure.

$$\pi_T^c(m) \leq \frac{1 + \mathbb{1}\left[T_l \neq T_r\right]}{2} \sum_{k=L_{T_l}}^{m-L_{T_r}} \min\left\{2\ell, \binom{m}{k}\right\} \sum_{\substack{1\leq a,b\leq c\\ a+b\geq c}} \binom{a}{c-b}\binom{b}{c-a}(a+b-c)! \cdot \pi_{T_l}^a(k)\pi_{T_r}^b(m-k)$$

Proposition. Soit $\mathscr{Q}^c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ l'ensemble des $\overline{\gamma}$ avec c parts réalisables à partir de $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$. Alors,

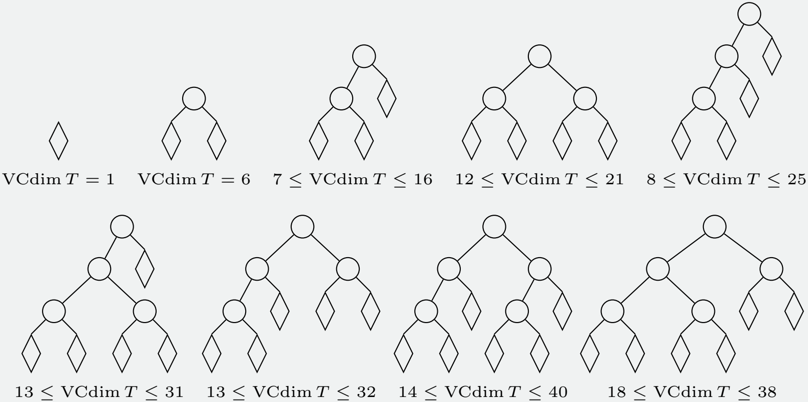
$$\mathscr{P}_T^c(S) = \bigcup_{\{\lambda, S\setminus\lambda\}} \bigcup_{a,b} \mathscr{Q}^c\left(\mathscr{P}_{T_l}^a(\lambda), \mathscr{P}_{T_r}^b(S\setminus\lambda)\right) \cup \mathscr{Q}^c\left(\mathscr{P}_{T_l}^a(S\setminus\lambda), \mathscr{P}_{T_r}^b(\lambda)\right)$$

Borne supérieure.

$$\pi_T^c(m) \leq \frac{1 + \mathbb{1}\left[T_l \neq T_r\right]}{2} \sum_{k=L_{T_l}}^{m-L_{T_r}} \min\left\{2\ell, \tbinom{m}{k}\right\} \sum_{\substack{1\leq a,b\leq c\\ a+b\geq c}} \tbinom{a}{c-b}\tbinom{b}{c-a}(a+b-c)! \cdot \pi_{T_l}^a(k)\pi_{T_r}^b(m-k)$$

Borne inférieure.

$$\operatorname{VCdim} T \geq \operatorname{VCdim} T_l + \operatorname{VCdim} T_r$$



Bornes sur la dimension VC des 9 premiers arbres non équivalents pour $\ell = 10$ attributs à valeur réelle.

Contributions

- Approche par partitions :

$$\overline{\gamma}(S), \qquad \mathscr{P}_T^c(S), \qquad \pi_T^c(m),$$

$$\operatorname{VCdim} T = \max_m \left\{ m : \pi_T^2(m) = 2^{m-1} - 1 \right\}$$

Contributions

- Approche par partitions :

$$\overline{\gamma}(S), \qquad \mathscr{P}_T^c(S), \qquad \pi_T^c(m),$$

$$\operatorname{VCdim} T = \max_m \left\{ m : \pi_T^2(m) = 2^{m-1} - 1 \right\}$$

- Dimension VC exacte des souches de décision sur ℓ attributs à valeur réelle :

$$\operatorname{VCdim} T = \max_m \left\{ m : 2\ell \geq \binom{m}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right\}$$

Contributions

- Approche par partitions :

$$\overline{\gamma}(S), \qquad \mathscr{P}^c_T(S), \qquad \pi^c_T(m),$$

$$\operatorname{VCdim} T = \max_m \left\{ m : \pi^2_T(m) = 2^{m-1} - 1 \right\}$$

- Dimension VC exacte des souches de décision sur ℓ attributs à valeur réelle :

$$\operatorname{VCdim} T = \max_m \left\{ m : 2\ell \geq \binom{m}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right\}$$

- Bornes sur la dimension VC des arbres en général.