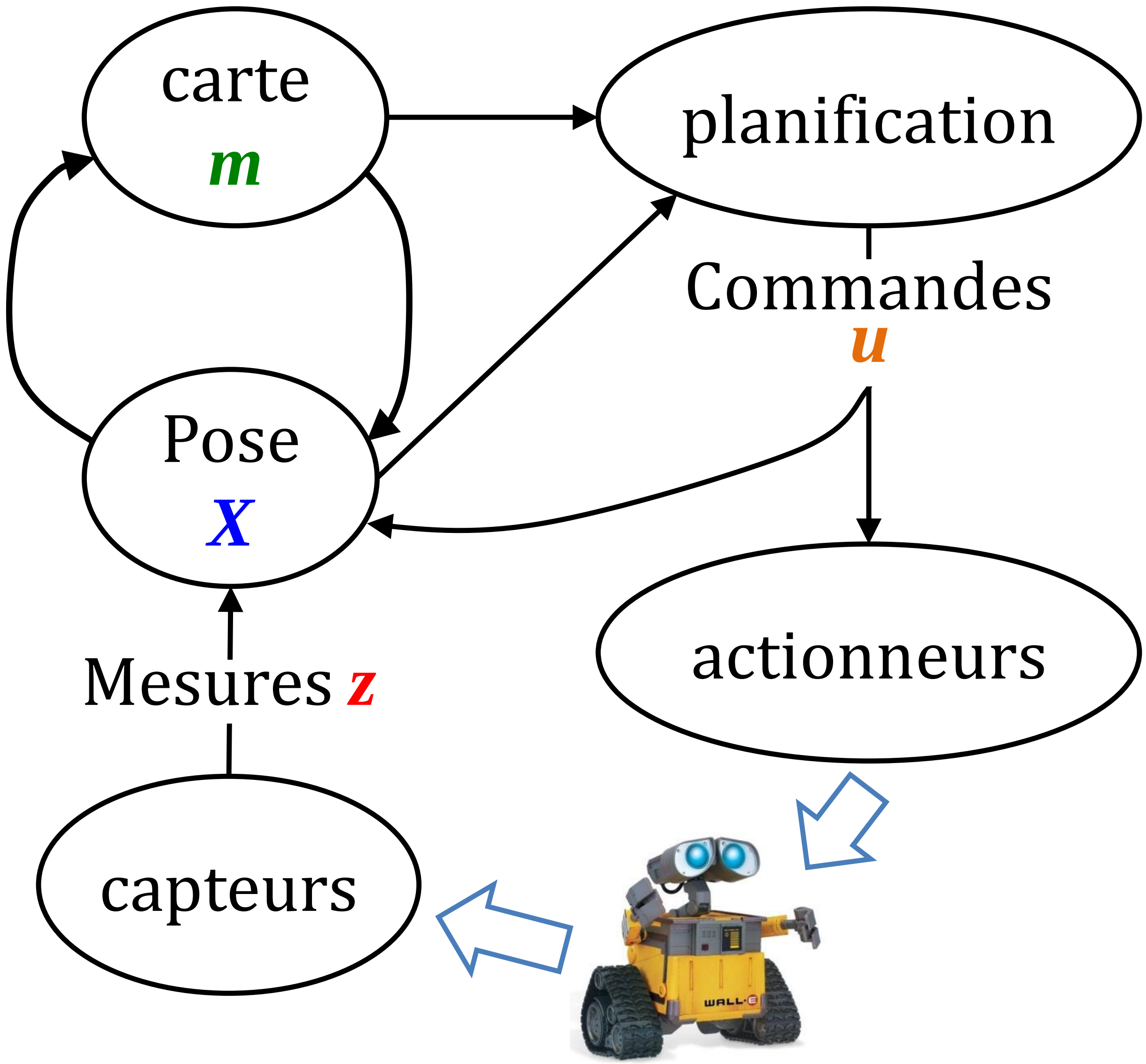
Revue: vue d'ensemble

Modéliser via équations et distributions



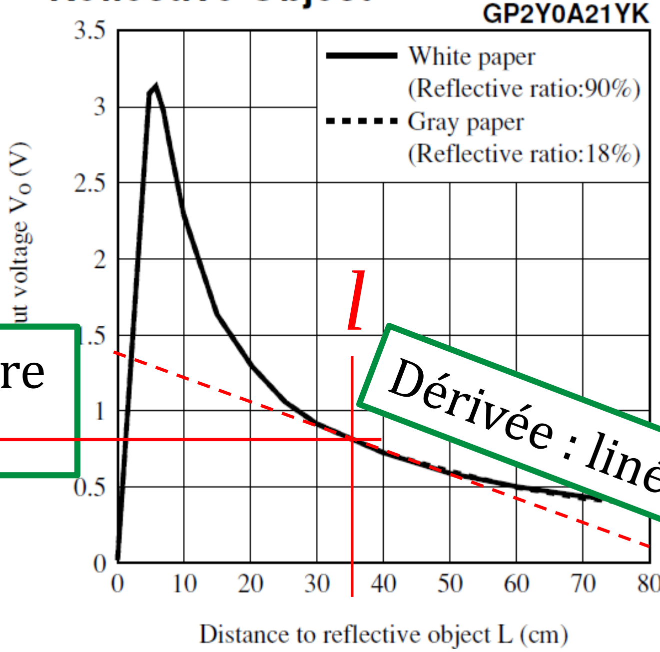
Revue: application des outils math.

Probabilités : Filtre Kalman Étendu

Algèbre linéaire : $x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & \Delta T\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\Delta T^2\\ \Delta T\end{bmatrix}g$

Intégrale : $h(t)=\iint \text{accélération}$

Fig.5 Analog Output Voltage vs. Distance to Reflective Object

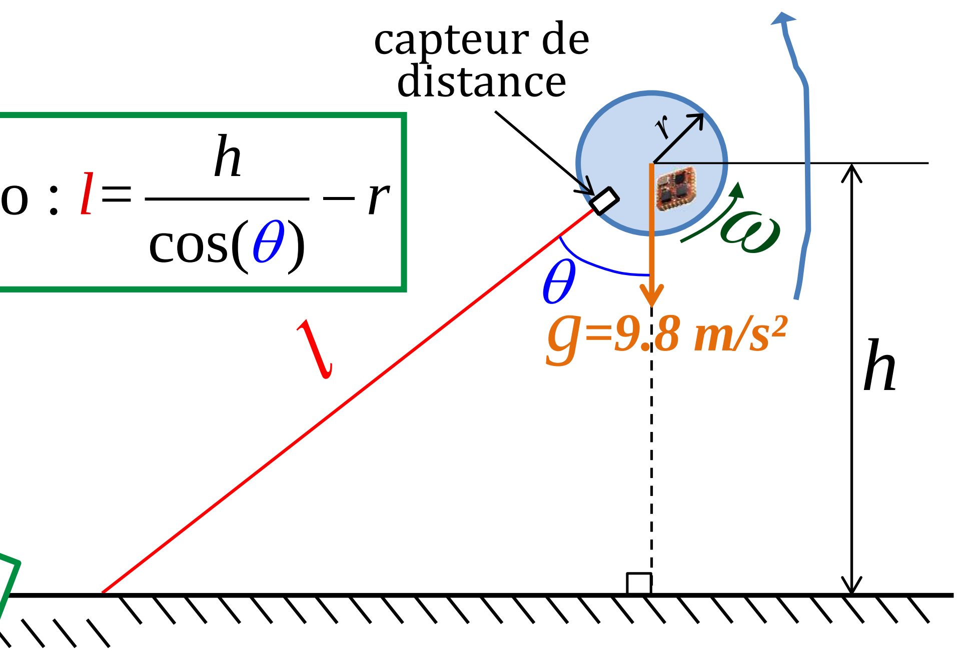


Mesure

z

Dérivée : linéariser

Trigo : $l=\dfrac{h}{\cos(\theta)}-r$



Révision des mathématiques

Concepts utilisés

- Trigonométrie et géométrie
- Coordonnées polaires vs. cartésiennes
- Matrices
- Linéarisation avec séries de Taylor
- Statistiques et probabilité (plus tard..)

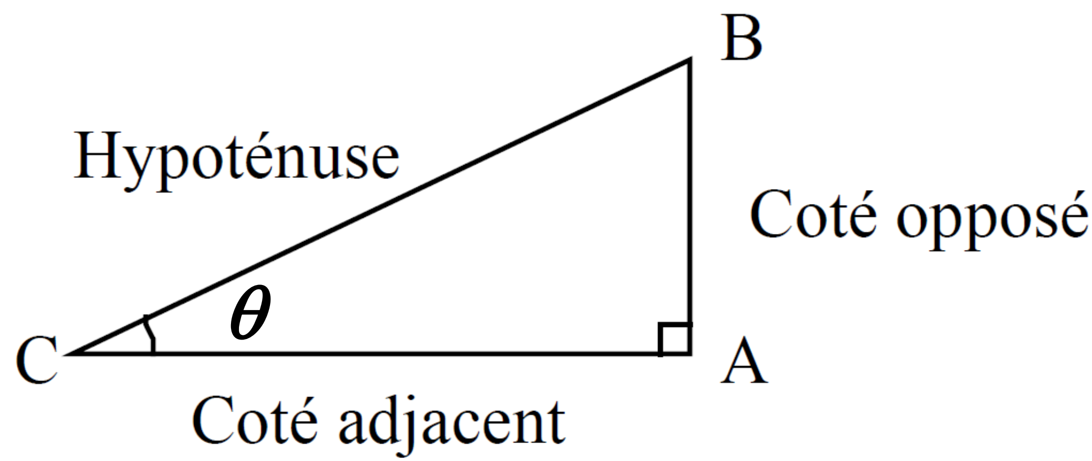
Trigonométrie et géométrie

sin, cos, tan

$$\sin\theta = \frac{opposé}{hypothénuse}$$

$$\cos\theta = \frac{adjacent}{hypothénuse}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{opposé}{adjacent}$$



Cherchez toujours le triangle rectangle dans les problèmes

sin, cos, tan

- Centaines d'identités trigonométriques
  - http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

puissances

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

signes

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = +\cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

multiples

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

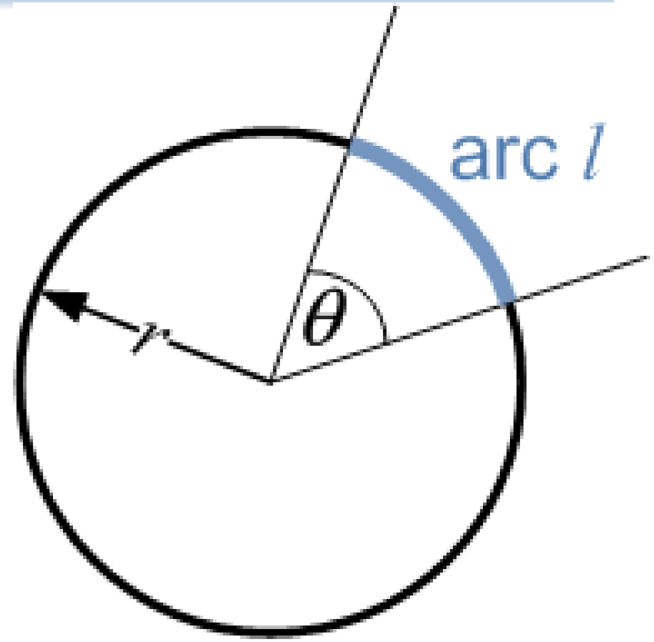
Seront incluses dans les examens

radian

- *radian* est une mesure d'angle

$$\boldsymbol{\theta} = \text{arc/rayon} = l/r$$

- $360^o = 2\pi \rightarrow 1 \text{ rad} \approx 57.3^o$

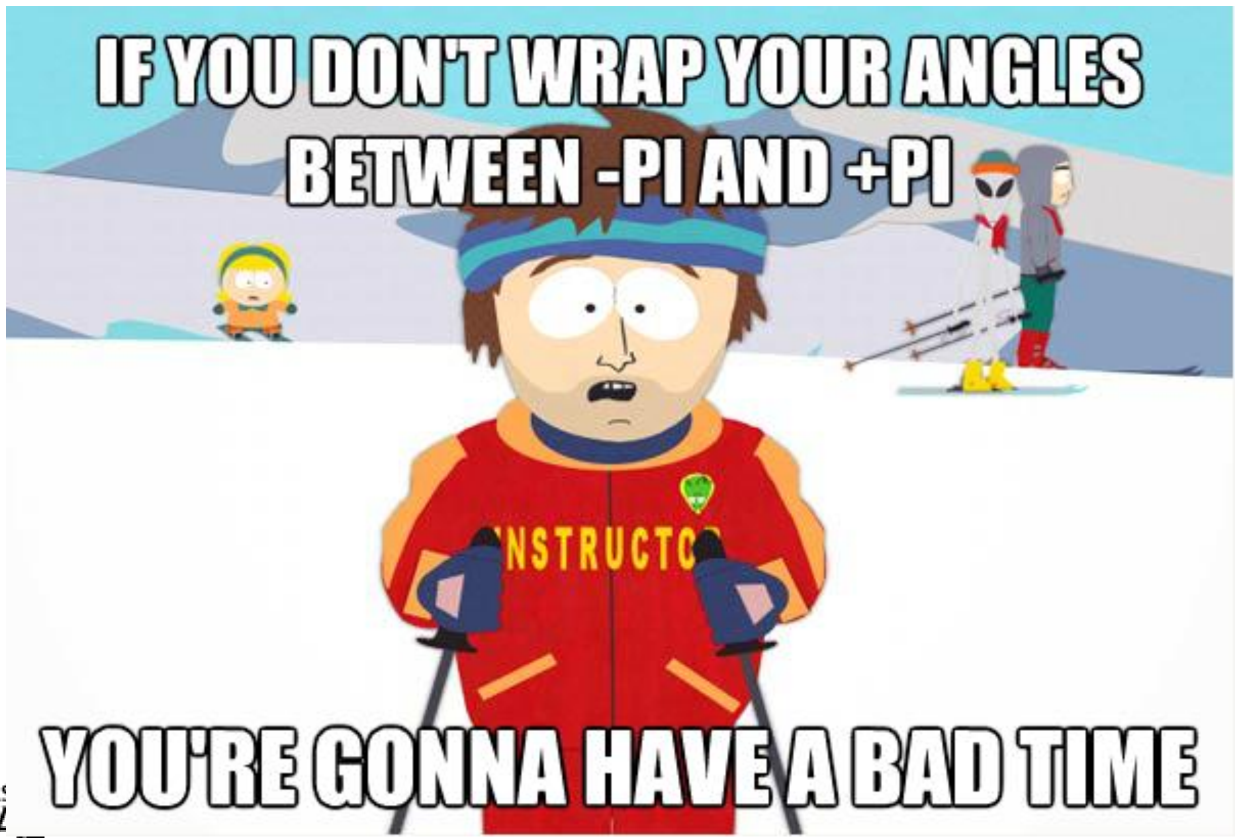


Attention aux calculs d'angles!

- Toujours conserver $-\pi < \theta \leqslant \pi$ rad!
- Exemple : $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2}$

matlab

`wrapToPi(   )`



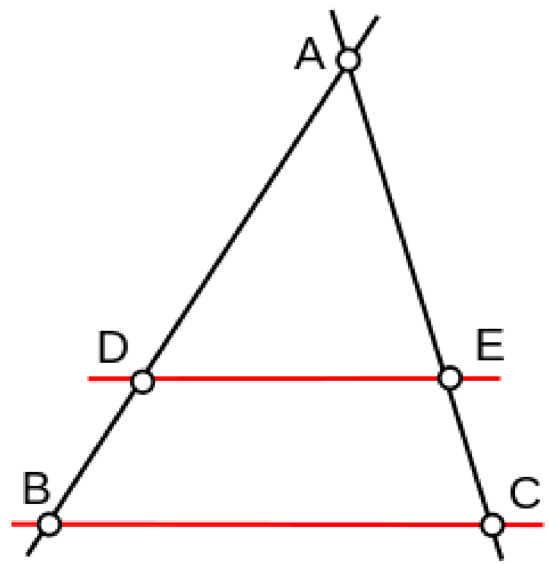
matlab

méfiez-vous des fonction **`std`**, **`var`**, *etc… sur des distributions d'angles*

Théorème de Thalès

- Triangle ABC
- Droite (DE) est parallèle à la droite (BC)
- On a :

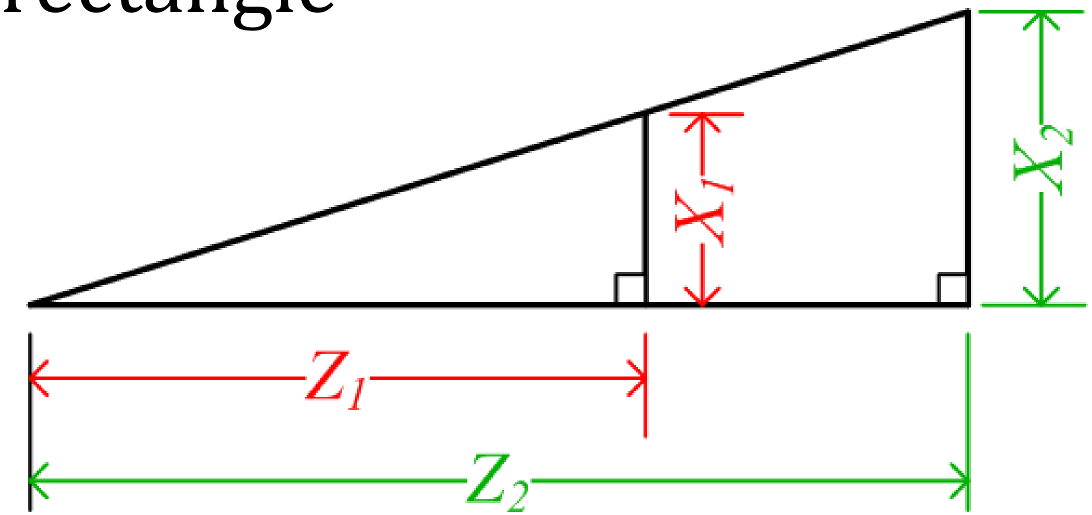
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



- On conserve les proportions
- ADE et ABC sont des triangles semblables (mêmes angles)

Théorème de Thalès

- Triangle rectangle



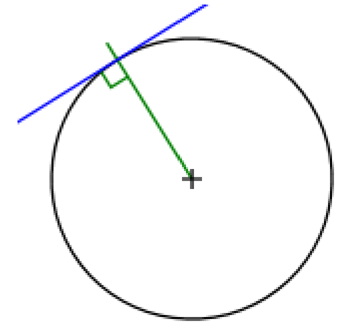
(on conserve les proportions)

$$\frac{X_1}{Z_1} = \frac{X_2}{Z_2}$$

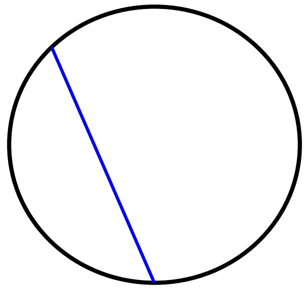
(utilisé par le modèle des caméras type sténopé)

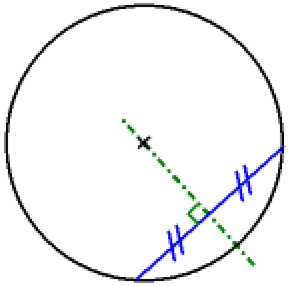
Géométrie d'un cercle : définitions

- La tangente est perpendiculaire au rayon



- Une corde est un segment de droite dont les extrémités touchent au cercle

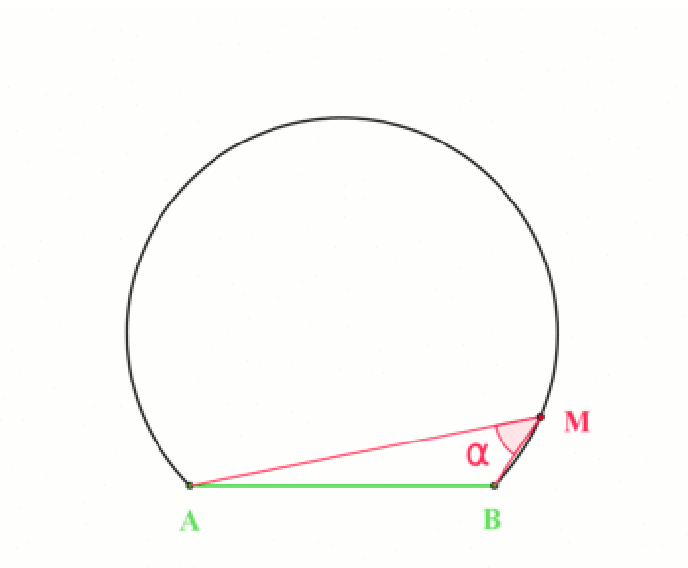


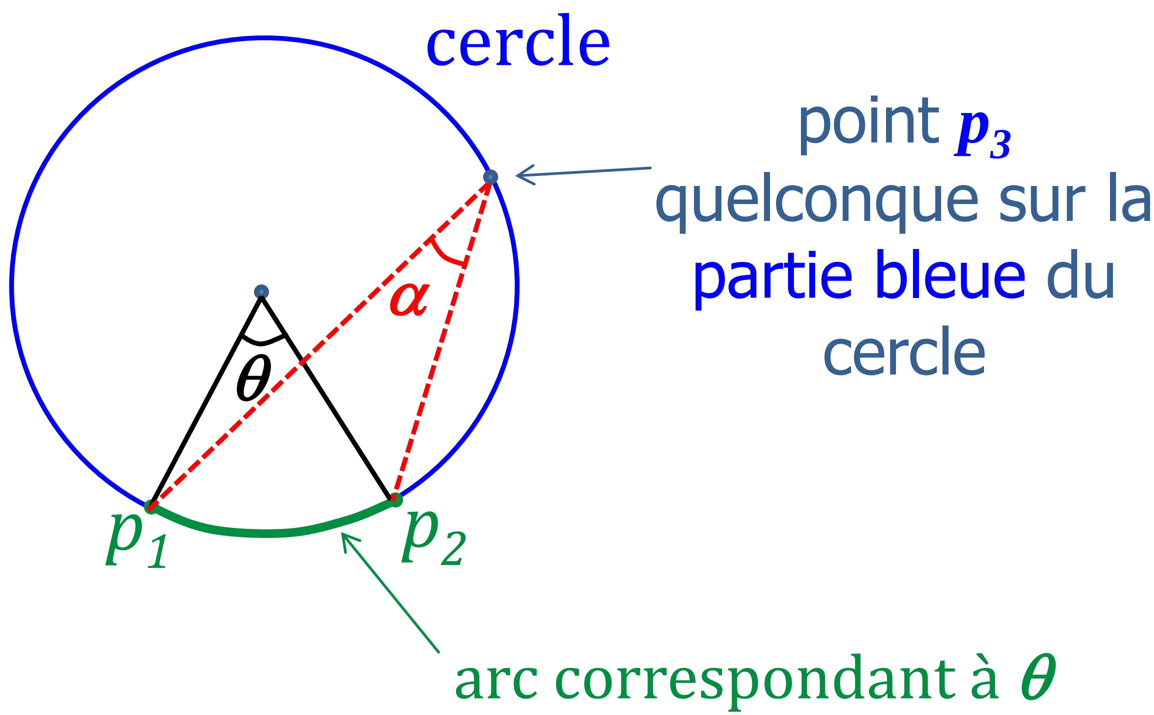


- La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle

Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

- Quel est l'angle inscrit α ?



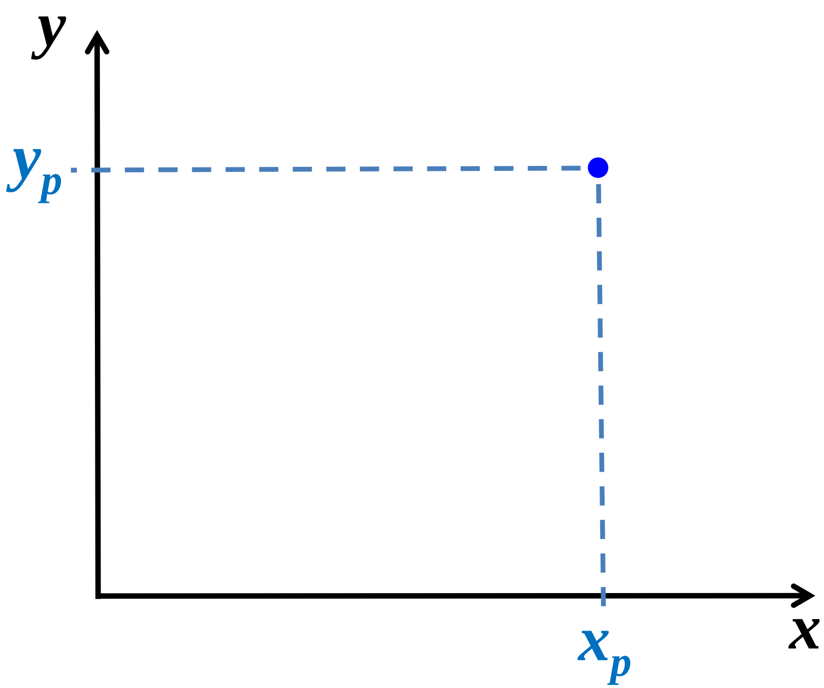


- $\alpha = \theta/2$ (peu importe où se trouve p_3 en dehors de l'**arc**!)

(utilisé pour localisation 2D par triangulation)

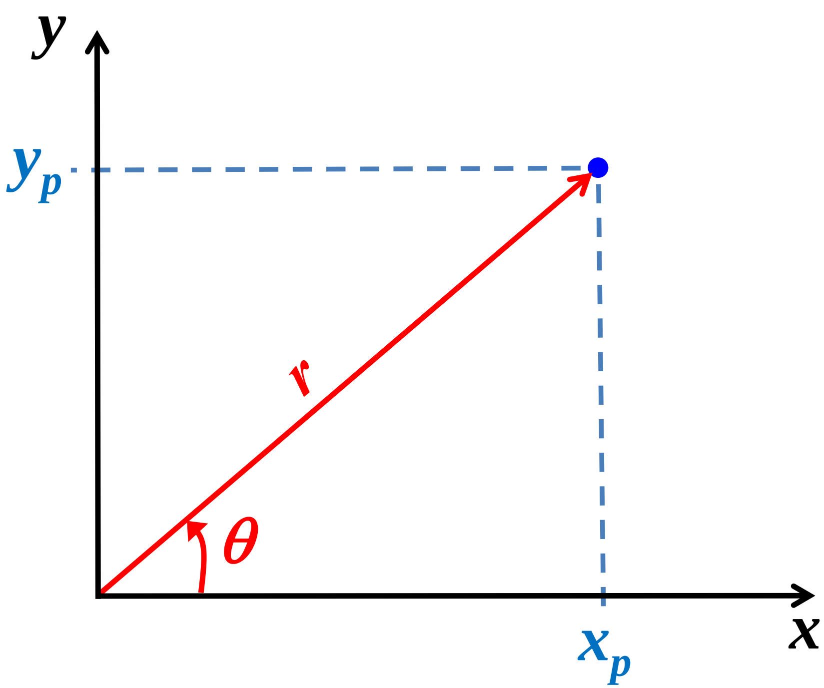
Coordonnées cartésiennes

- Pour représenter un endroit en 2D : (x_p, y_p)



Coordonnées polaires

- Pour représenter un endroit en 2D : (r, θ)



$$x_p = r \cos \theta$$
$$y_p = r \sin \theta$$

dans les deux cas, 2 paramètres

(scans LiDAR sont naturellement en coordonnées polaires)

Algèbre linéaire

(et un peu de matlab!)

Vecteur

- Contenant de réels de dimension nx1

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(nous servira à stocker l'état d'un système)

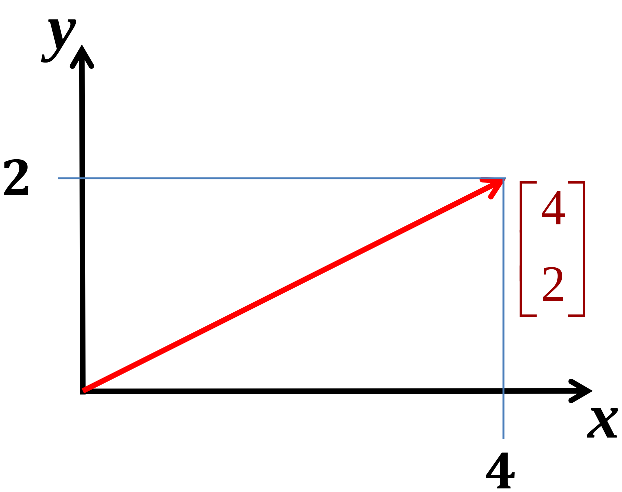
matlab

```
>> a = [1; 2]
a =
      1
      2

>> a = [1 2]'
a =
      1
      2
```

- Quantité géométrique représentant une magnitude et une direction dans l'espace

2D

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3D

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

Vecteur : norme

- Magnitude d'un vecteur (norme-2 ou norme euclidienne)

$$\boxed{\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}$$

- Exemple

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T, \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} = 5.3852\ldots$$

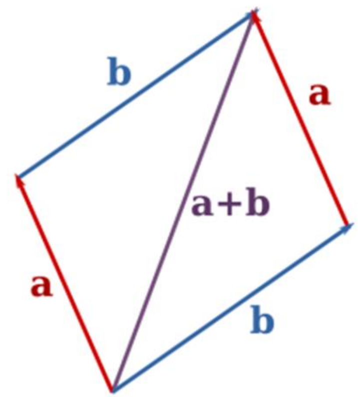
```
>> a = [2 3 4]';
>> norm(a)

ans =
     5.3852
```

matlab

Vecteur : addition

- Additionne chaque composante à la fois

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$$



- Commutatif : a+b = b+a
- Soustraction suit la même logique

```
>> a = [2 3 4]';
>> b = [0.1 0.2 0.3]';
>> a+b
ans =

    2.1000
    3.2000
    4.3000
```

matlab

Vecteur : produit scalaire (*dot product*)

- Deux vecteurs en entrée, 1 valeur numérique (un scalaire) en sortie

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$$

- Exemple

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T,\ \vec{b}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\end{bmatrix}^T\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times5+3\times6+4\times7=56$$

```
>> a = [2 3 4]';
>> b = [5 6 7]';
>> dot(a,b)

ans =
     56
```

matlab

`a'*b` aussi

UNIVERSITÉ LAVAL

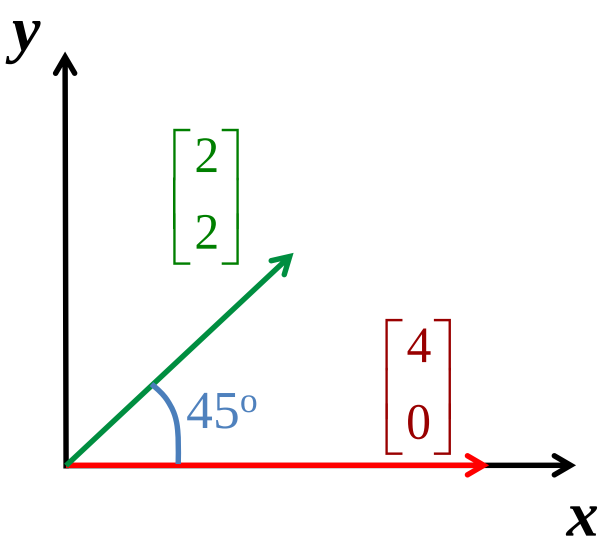
Vecteur : angle

- Pour retrouver l'angle $\boldsymbol{\theta}$ entre deux vecteurs :

(cosine distance)

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)}$$

- Valable en 2D, 3D, 456D etc…




```
>> a = [2 2]';
>> b = [4 0]';
>> t = acos(dot(a,b)/(norm(a)*norm(b)))
t =
    0.7854
>> rad2deg(t)
ans =
   45.0000
```

matlab

Matrices

- Dimension n x 1: vecteur colonne

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Matrice carrée : n x n

minuscule

majuscule $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

- Matrice taille quelconque : m x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2 x 3

matlab

```
>> a = [1; 2]
   a =
       1
       2

>> A = [1 3; 2 4]

   A =
    1     3
    2     4
```

Opérations sur matrices

- Addition *A+B*

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\7 & 5 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+0 & 3+0 & 1+5\\1+7 & 0+5 & 0+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\8 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

  – commutatif : *A+B = B+A*

- Multiplication avec scalaire *2A*

$$2 \cdot \begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\4 & -2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot -3\\2\cdot 4 & 2\cdot -2 & 2\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\8 & -4 & 10\end{bmatrix}$$

- Transpose *m* x *n* → *n* x *m*
  – colonne ←→ rangée

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -6 & 7\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -6\\3 & 7\end{bmatrix}$$

matlab

```
A+B

2*A

A'
```

tiré de wikipedia.org

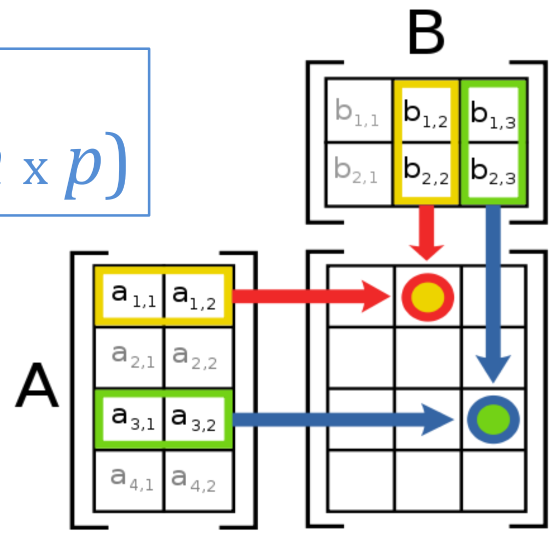
Opérations sur matrices

- Multiplication AB
  - nombre de colonnes de A = nombre de rangées de B

tailles

$(m \times n) * (n \times p) = (m \times p)$

Important pour l'examen



matlab

```
A*B
```

- pas commutatif $AB \neq BA$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiré de wikipedia.org

Matrices

- Matrice identité $AI_n = I_m A = A$ *si A est m x n*

  (matrice carrée)

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matlab

```
>> eye(4)
ans =
        1         0         0         0
        0         1         0         0
        0         0         1         0
        0         0         0         1
```

- Diagonale

  (matrice de bruit dans filtre Kalman)

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

- Triangulaire

inférieure $\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$ (lower) and $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$ supérieure (upper triangular matrix)

tiré de wikipedia.org

Inverse d'une matrice

- Inverse d'une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{n}$ x $\boldsymbol{n}$

$$AB = I_n$$

- Si $\boldsymbol{B}$ existe, $\boldsymbol{A}$ est dite inversible
- L'inverse est noté $\boldsymbol{A}^{-1}$
- L'inverse est unique : $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$

matlab *backslash*

```
>> A*inv(A)
ans =
    1.0000         0
    0.0000    1.0000
```

```
>> A\A
ans =
     1     0
     0     1
```

Inverse d'une matrice

matlab

```
>> X = [1 3; 2 4]

X =

     1     3
     2     4

>> inv(X)

ans =

   -2.0000    1.5000
    1.0000   -0.5000
```

Matrice singulière

- Matrice carrée ***A*** est **singulière** si n'a pas d'inverse

$$AB = I_n$$

dans ce cas-ci, ***B*** n'existe pas!

Matrice : système d'équations linéaires

- Soit le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} 4x_1 &+ 3x_2 + 7x_3 = y_1 \\ 5x_1 &+ 2x_2 = y_2 \\ & 4x_2 + 3x_3 = y_3 \end{aligned}$$

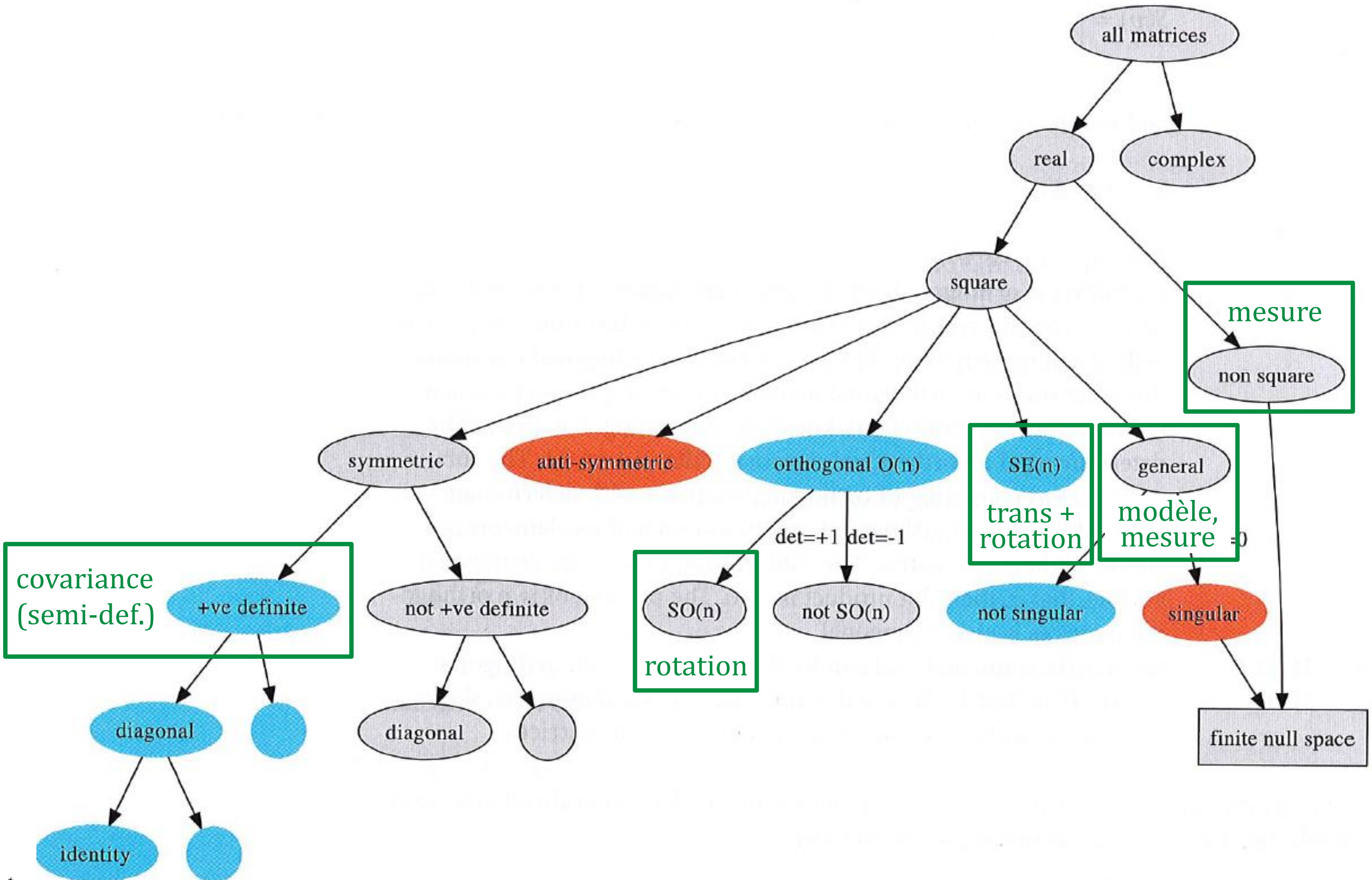
- On peut représenter sous la forme ***Ax=y*** :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}\text{ (va encoder modèle du système)}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(Filtre de Kalman, Kalman étendu)

UNIVERSITÉ LAVAL

Taxonomie des matrices (utiles)



Tiré de *Robotics, Vision and Control*, P. Corke.

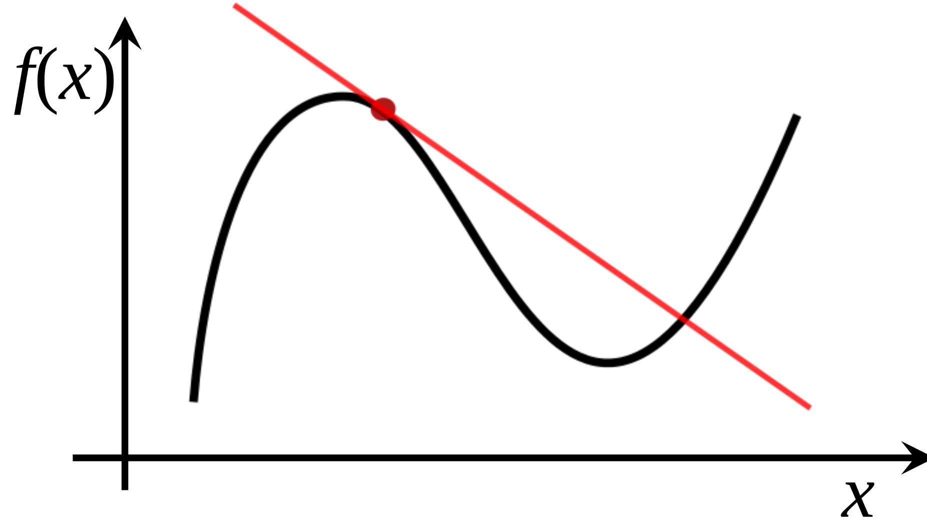
Dérivée

Définition de la dérivée

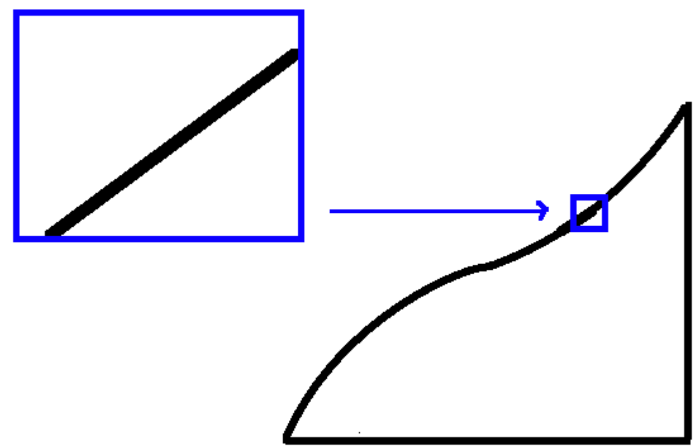
- **Pente** d'une fonction $f(x)$ au point x
- Définition :

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

(Pensez $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$!)



- Une fonction continue est approximativement linéaire lorsque « zoomé »



Dérivée simple, double

- Exprimée

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) = f', \qquad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''}$$

dérivée dans le temps

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(t) = \dot{f}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} f(t) = \ddot{f}}$$

Règles des dérivées utiles

- Fonction constante : $f(x) = a$, alors $f'(x) = 0$
- Fonction puissance : $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$
- *(pour les autres, utilisez un site en ligne! ;))*
- Somme de deux fonctions $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
- Dérivée des fonctions composées

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

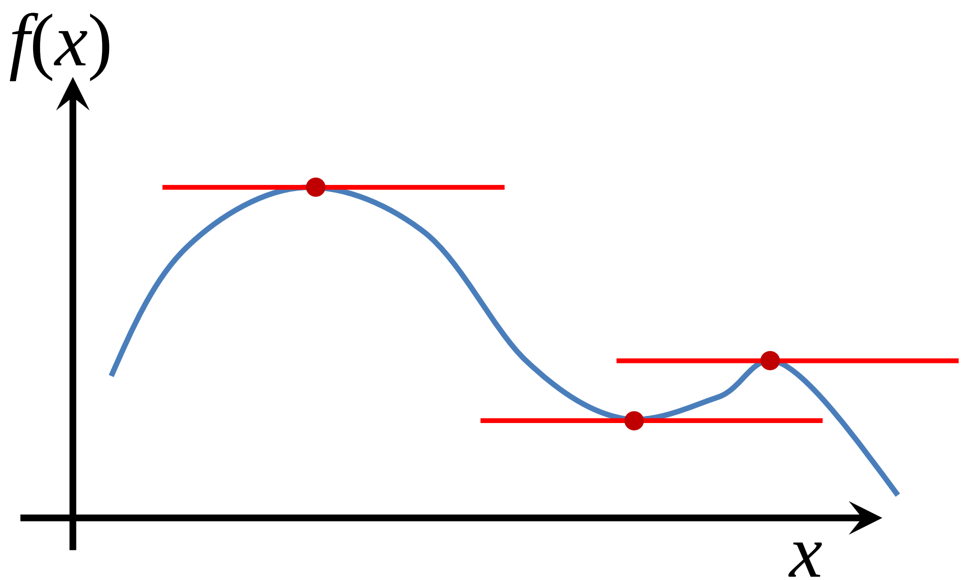
- Dérivée partielle par rapport à x_i pour $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$
  - On considère les autres x_j comme des constantes
  - e.g. $$\frac{\partial}{\partial x_2}[3x_1 + 4x_2 + 7x_3] = 4$$

notez le *d* arrondi

(Jacobiennes du filtre de Kalman Étendu)

Maximum/minimum d'une fonction *f*

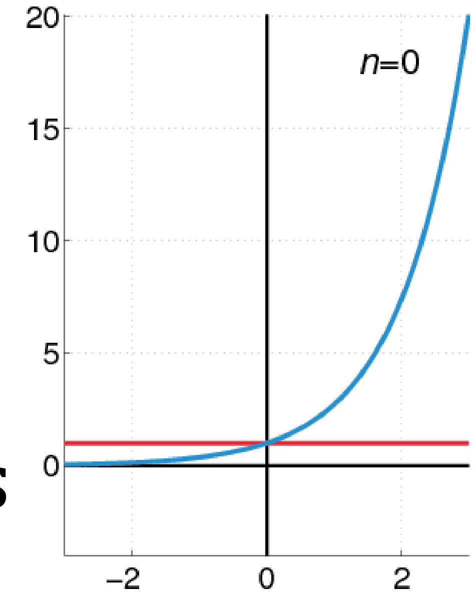
- À un maximum/minimum local ou global, la dérivée de la fonction *f* est nulle



Séries de Taylor

Série de Taylor

- Représentation d'une fonction ***f*** par une série infinie de dérivées de ***f*** à un point ***a***

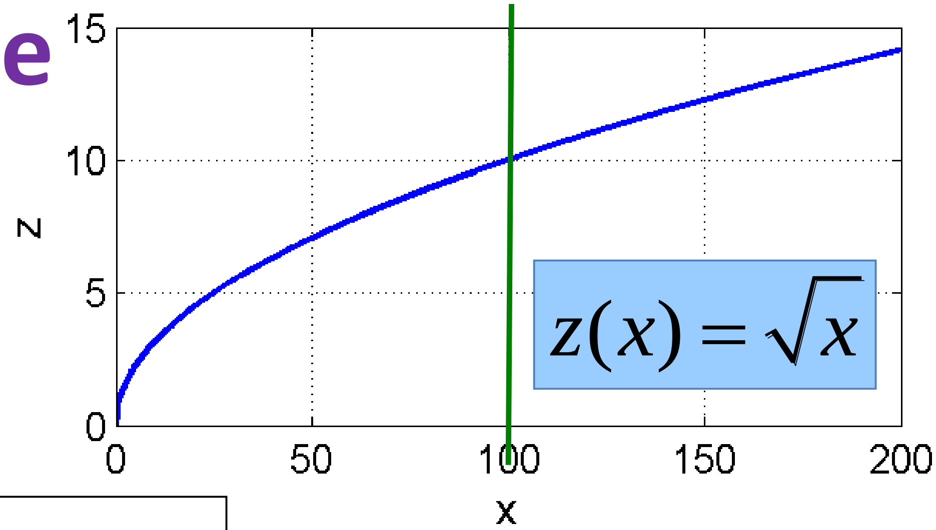


$$f(x)\big|_a = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

(factoriel 1!=1   2!=1x2=2   3!=1x2x3=6   4!=1x2x3x4=24)

- Faire une **approximation linéaire** des fonctions non-linéaires autour d'un endroit ***a*** particulier *(un peu partout dans le cours)*
- Si les termes *f''*, *f'''*, .. sont élevés, approximation mauvaise loin de ***a***

Série de Taylor : exemple



- Approximer *z(x)* autour de $x = a = 100$

$$z(x) = z(a) + \frac{z'(a)}{1!}(x-a) + \frac{z''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$z' = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$z'' = \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{x} = -\frac{1}{4x^{3/2}}$$

$$z_1(x) = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100}}(x-100)$$ *approximation avec 1 dérivée*

$$z_2(x) = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100}}(x-100) - \frac{1}{2\cdot 4(100)^{3/2}}(x-100)^2$$ *approx. avec 2 dérivées*

http://www.numberempire.com/derivatives.php

Série de Taylor : exemple

- Approximer *z(x)* autour de ***a***=100

$$\boxed{z_1(x) = 10 + 0.05(x - 100)}$$

$$\boxed{z_2(x) = 10 + 0.05(x - 100) - 0.000125(x - 100)^2}$$

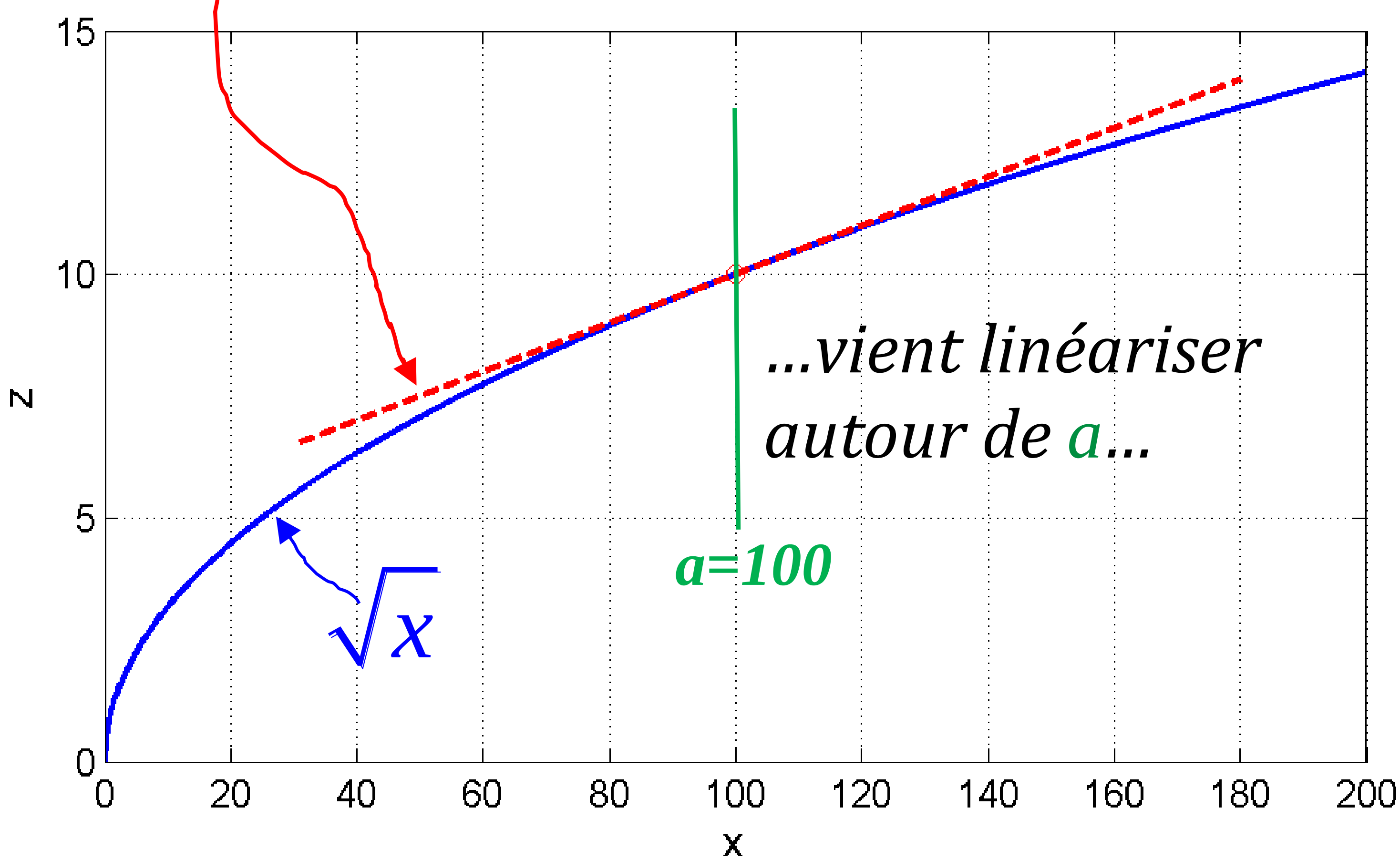
approximations

x	$z(x)$ exacte	$z_1(x)$	$z_2(x)$
100	10	10	10
100.5	10.0250	10.0250	10.0250
105	10.2470	10.2500	10.2469
110	10.4881	10.5000 (**0.114 %**)	10.4875 (**0.0056%**)

% d'erreur

Série de Taylor : linéarisation

$$z_1(x) = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100}}(x - 100) = 10 + 0.05(x - 100)$$



Approximation linéaire de sin, cos

- Rendre les fonctions trigonométriques courantes *linéaires*, pour des petits angles

$$\theta << 1 \text{ rad}$$

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots}$$

$$a = 0$$

Fonction	Série de Taylor	Approximation linéaire
$\sin(\theta)$	$\sin(0) + \cos(0)\theta - 0.5\sin(0)\theta^2 + \ldots$	$\boldsymbol{\theta}$
$\cos(\theta)$	$\cos(0) - \sin(0)\theta - 0.5\cos(0)\theta^2 + \ldots$	1

$$Note: \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

UNIVERSITÉ LAVAL

Série de Taylor : résumé

- Nous permettre d'approximer n'importe quelle fonction
- Choisis un « point d'opération » ***a***
- Choisis le nombre de termes
  – pour rendre linéaire, seulement la 1ère dérivée!

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)}$$

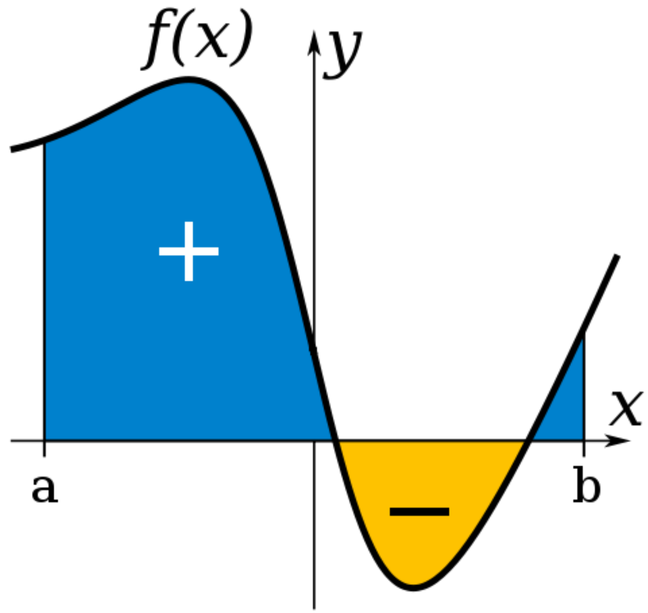
  – fonction linéaire == solution de forme fermée

Intégration

Définition

- Aire sous la courbe

$$\int_a^b f(x)dx =$$

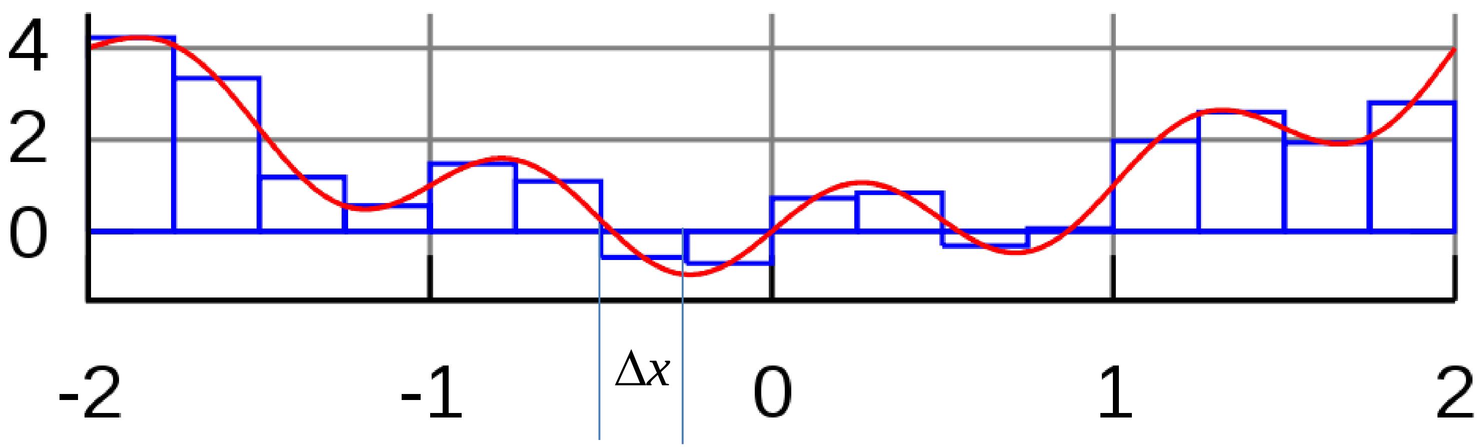


- Opération inverse de la dérivée

Comment la calculer?

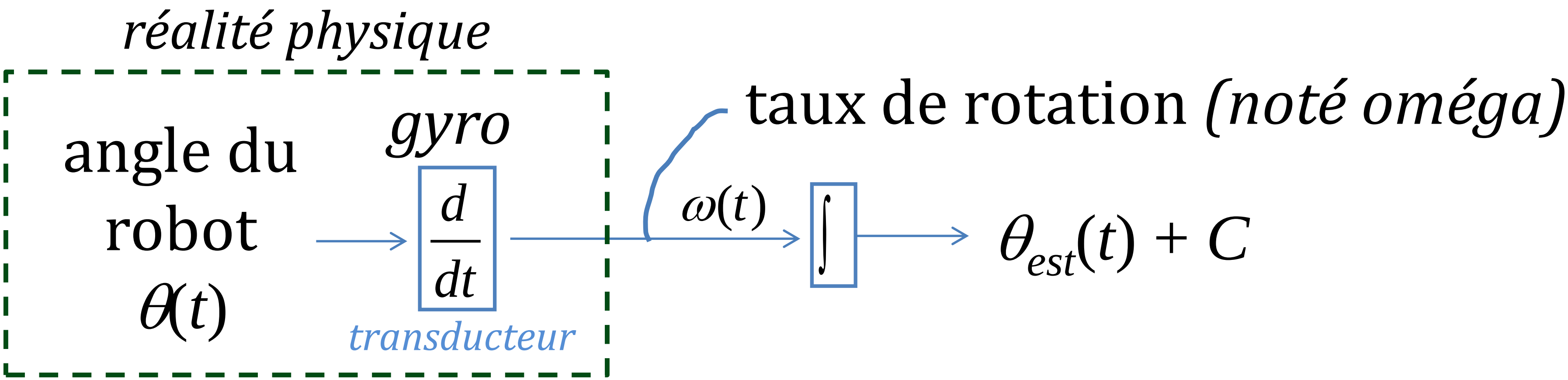
- Dans le cours, on fera essentiellement de l'**intégration numérique**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \sum_{i=a}^{b} f[i]\Delta x}$$



Exemple avec gyroscope à taux

- Gyroscope : donne un **taux** de rotation (°/s)

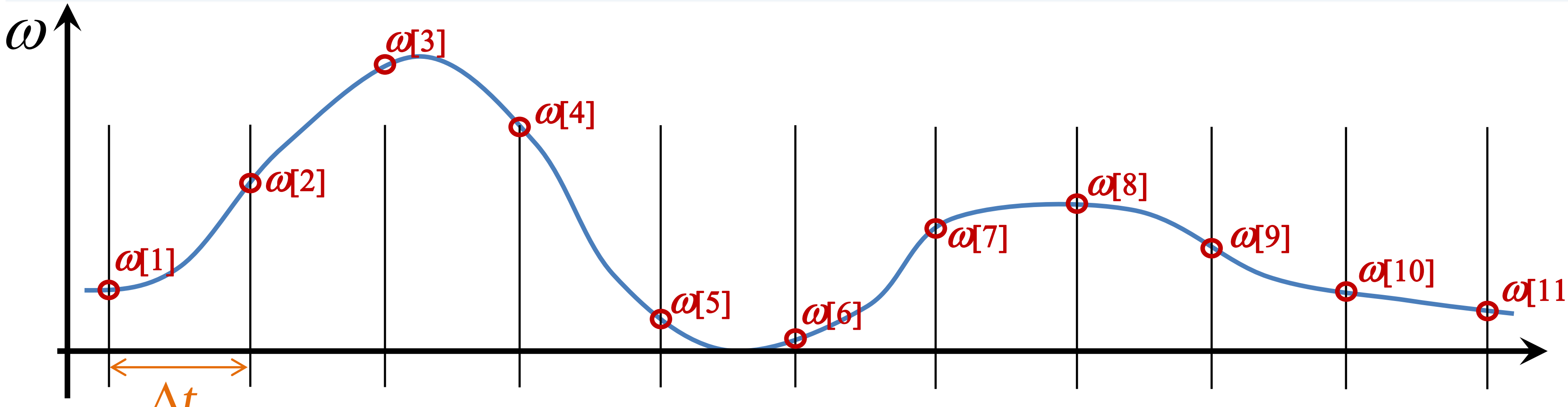


- Signal ω(*t*) échantillonné à chaque Δ*t* : ω[*i*]
- On retrouve l'angle θ par :

$$\theta[i+1] = \omega[i+1]\Delta t + \theta[i]$$

où *i* est un index (entier)

Exemple avec gyroscope



autour de 10 ms

```
dt = 0.01 % Periode d'échantillonnage
w = [0.2, 0.3, 0.1, -0.05, -0.07, -0.02];

theta(1) = 0.04;
for index = 1:size(w,2)
      theta(index+1) = w(index)*dt + theta(index);
end
```

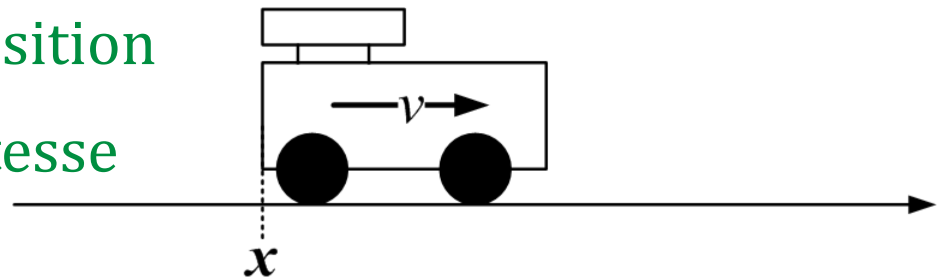
le « C » des intégrales non-définies est l'angle initial (si connu)

(voyez aussi la fonction **cumsum**)

Robotique : combine matrice + intégration

- Système *linéaire* *(parfois approximatif)* représentant l'évolution de l'état d'un robot dans le temps

- Vecteur d'état $X = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{position} \\ \leftarrow \text{vitesse} \end{matrix}$



$$\text{équations du système} \begin{cases} x_{t+1} = x_t + v_t \Delta t & \textit{intégration numérique simplifiée} \\ v_{t+1} = v_t \end{cases}$$

$$\boxed{X_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ v_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_t}$$

(utilisé dans la section estimation d'état)