Modèle de capteurs probabiliste

Modéliser un capteur : déterministe

- Modèle déterministe
  - pas de bruits

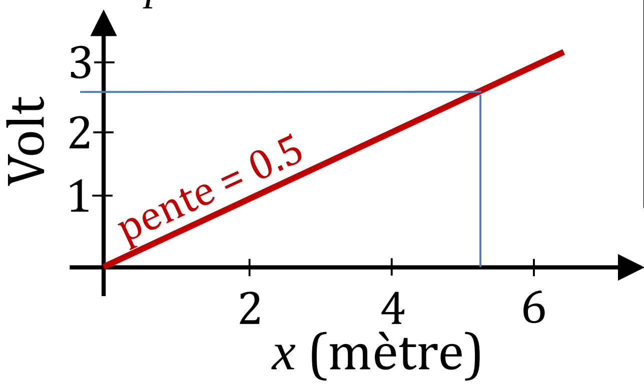
    $$z = f_{capteur}(x)$$

- Si le système (x) ne change pas, z reste constant entre les mesures

Exemple : télémètre laser

Cas : capteur déterministe sans bruit

$z=f_{capteur}(x)=0.5x$



Pourquoi des Volts? Pour bien montrer que je n'ai pas besoin d'avoir les mêmes unités pour x et z.

Prend des mesures

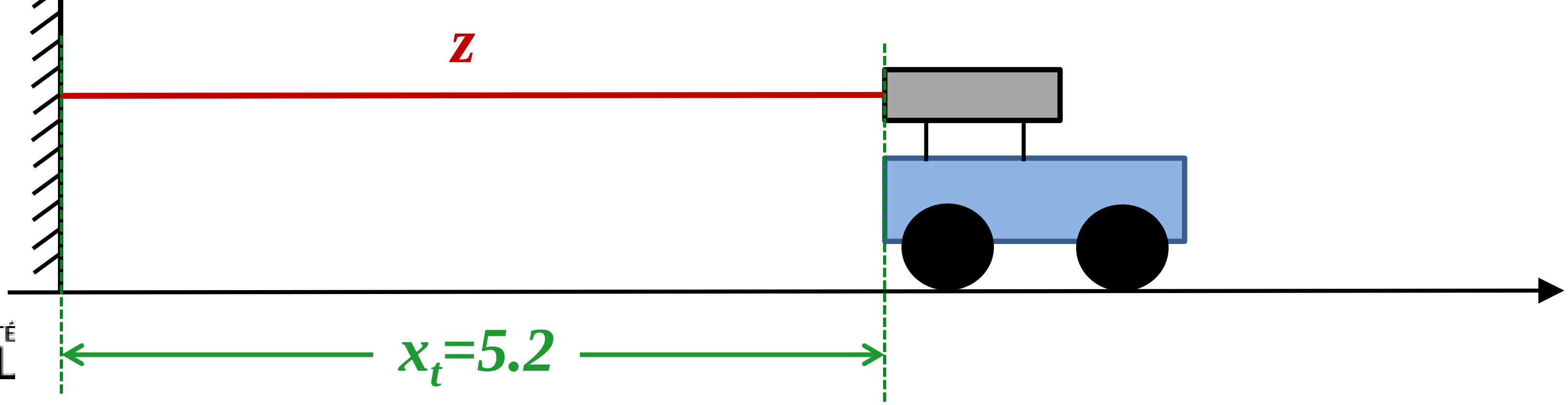
z_1 = **2.60** Volt

z_2 = **2.60** Volt

z_3 = **2.60** Volt

z_4 = **2.60** Volt

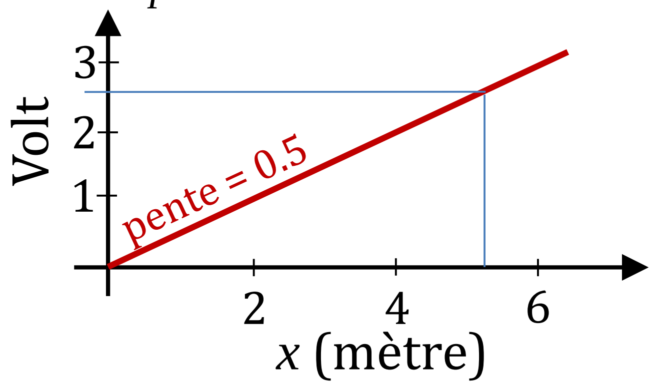
Pas réaliste!



Exemple : télémètre laser

Cas : Réalité

$z=f_{capteur}(x)=0.5x$



Résultats partiellement aléatoires!

(mais proche de 2.60 V)

Prend des mesures

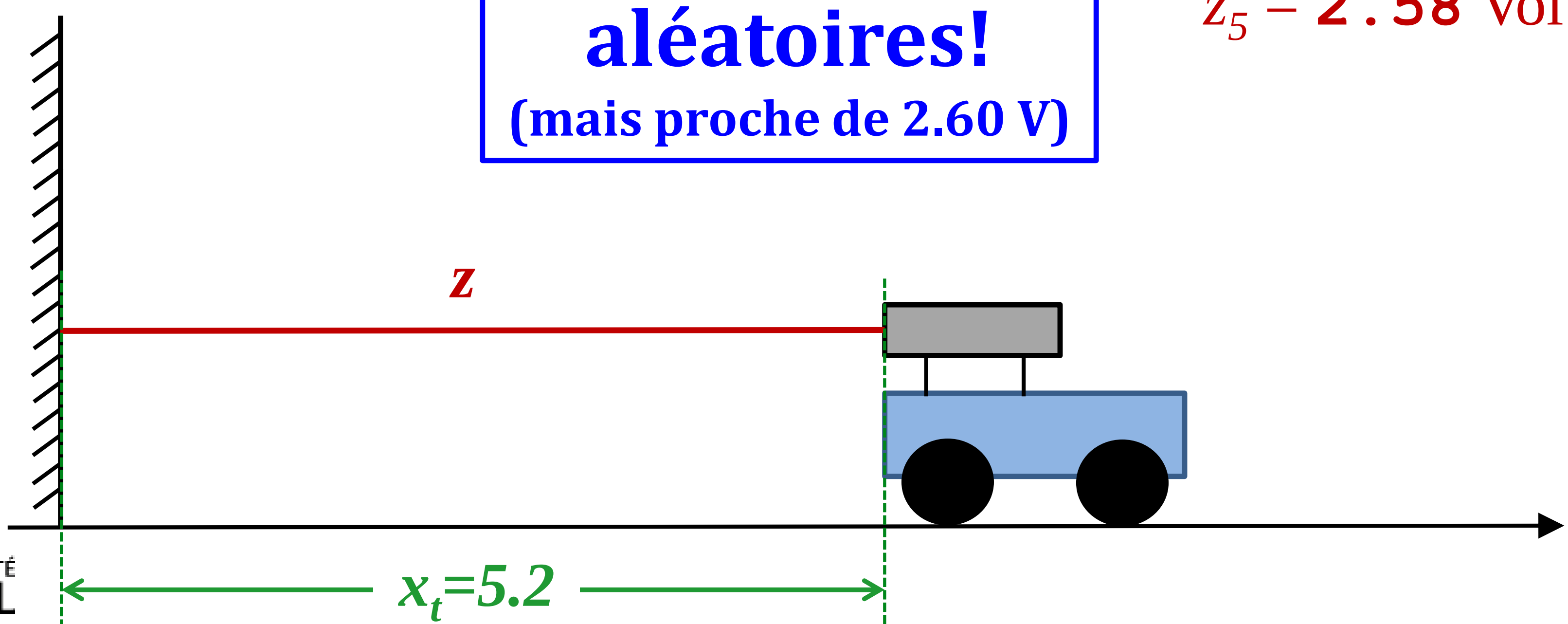
z_1 = **2.63** Volt

z_2 = **2.45** Volt

z_3 = **2.74** Volt

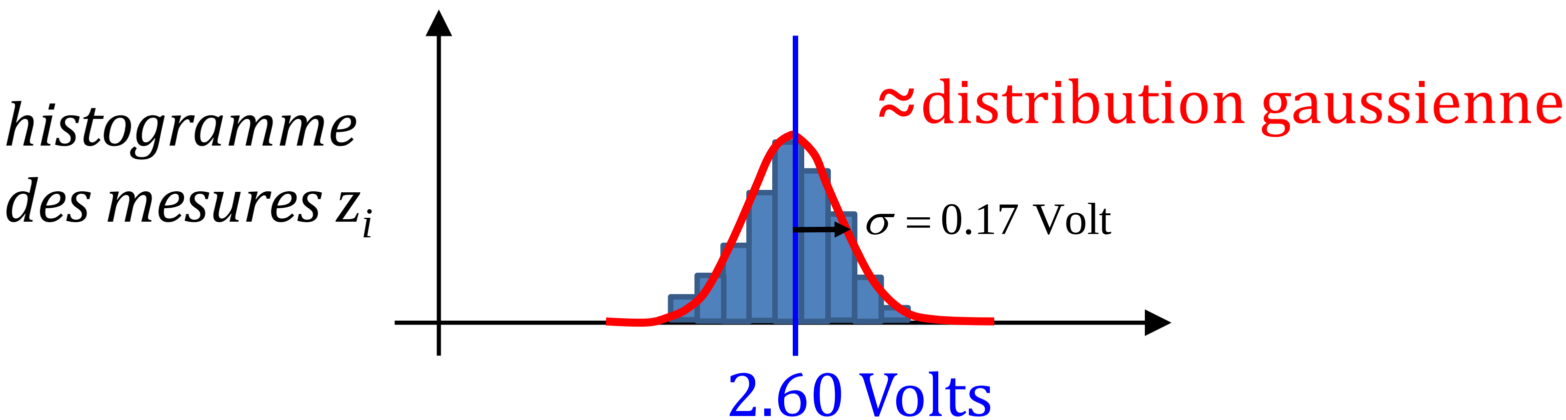
z_4 = **2.71** Volt

z_5 = **2.58** Volt



Exemple : télémètre laser

- Si on prend beaucoup de mesures z (1,000+ mesures)
- Distribution de z_i (fonction `hist` dans matlab)



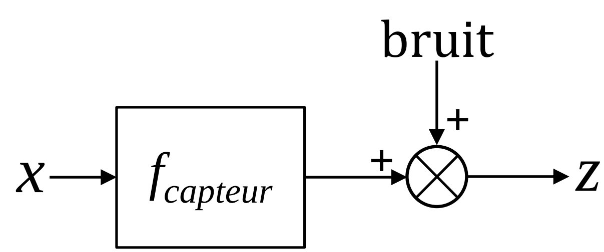
pige dans une distribution…

avec moyenne…

$$\boxed{z \sim N(f_{capteur}(x), \sigma_{\text{capteur}}{}^2)}$$

normale…

et variance



Modéliser un capteur : probabiliste

- Monde est rempli de bruits
  - interférence électromagnétique
  - vibrations
  - bruit de grenaille (shot noise)
  - bruit thermique
  - bruit en créneaux
  - bruit de quantification
  - etc…

réalité physique

- Modèle probabiliste : **capteur est une distribution**

déterministe $z = f_{capteur}(x)$ ⇒ ***probabiliste*** $p(z|x)$ ← l'art de bien modéliser un capteur…

Quelle est la prob. d'une mesure z

sachant l'état x du système

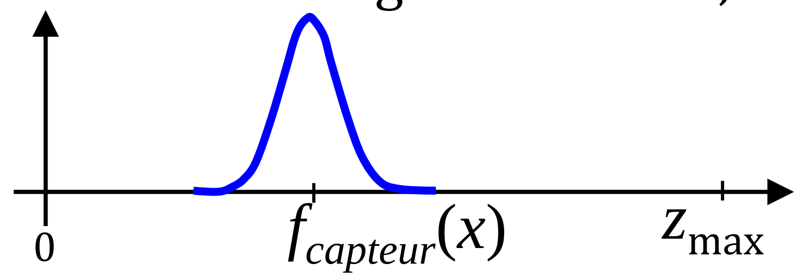
Exemple précédent $z = 0.5x$ $z \sim N(0.5x, 0.17^2)$

Exemple de modélisation

- Soit un capteur qui :

A) 80% du temps retourne une mesure valide mais bruitée gauss. σ=0.25;

$$p_{valide}(z \mid x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z - f_{capteur}(x))^2}{2\sigma^2}}$$



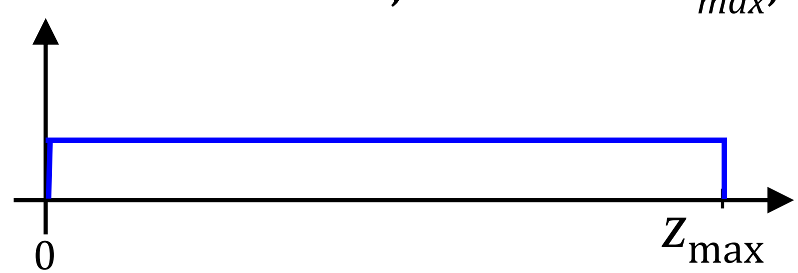
B) 15% du temps manque la cible et retourne la valeur maximale z_{max};

$$p_{manque}(z \mid x) = \delta(z - z_{\max})$$

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

C) 5 % du temps donne une valeur complètement aberrante, entre 0 et z_{max};

$$p_{aberr}(z \mid x) = \frac{1}{z_{\max}}$$



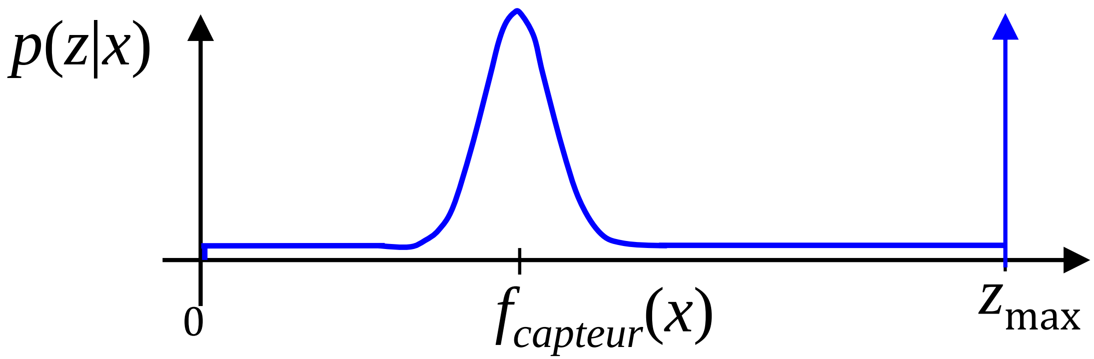
UNIVERSITÉ LAVAL

$\delta(\,)$: voir http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

Exemple de modélisation

- Notre capteur au complet :

$$p(z \mid x) = 0.80\, p_{valide}(z \mid x) + 0.15\, p_{manque}(z \mid x) + 0.05\, p_{abber}(z \mid x)$$



- La distribution $p(z|x)$ encode les trois modes d'opération du capteur!
- Va nous permettre
  - simuler un capteur (très utile)
  - faire de l'inférence $z \rightarrow x$ (prochaine section…)

Inférence Bayesienne

Inférence Bayésienne

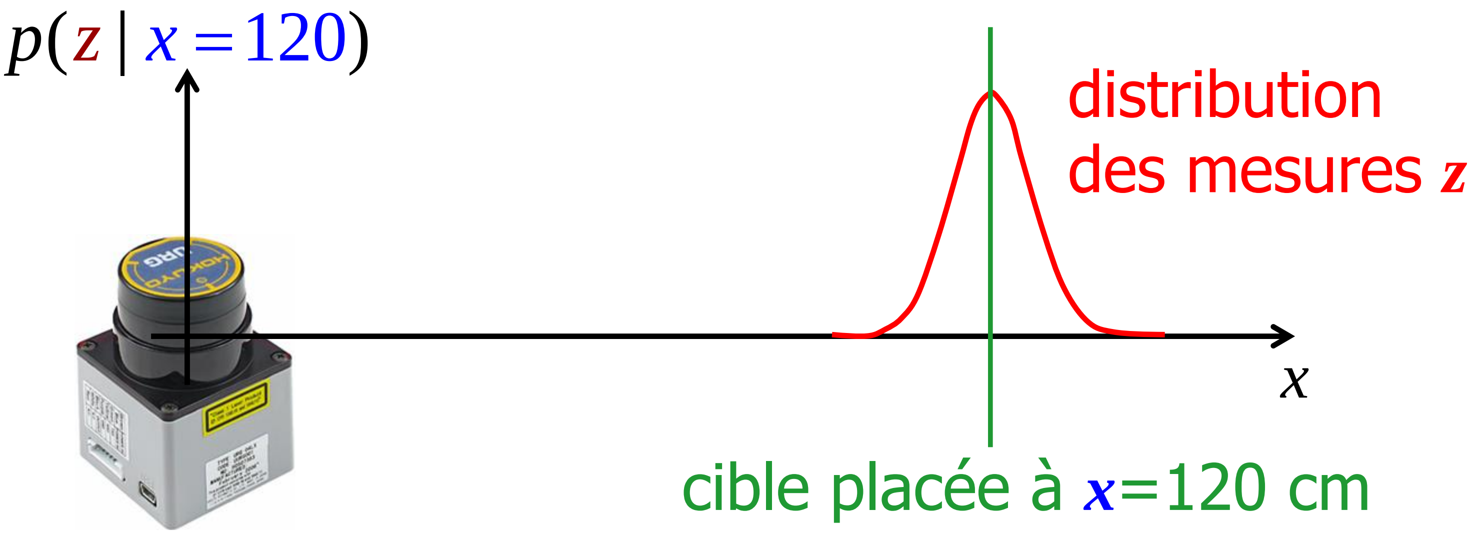
- Dans de nombreux cas :
  - on connait $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$
  - mais on cherche $P(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$

« Le théorème de Bayes permet d'inverser les probabilités. C'est-à-dire que si l'on connaît les conséquences d'une cause, l'observation des effets permet de remonter aux causes. »

wikipedia.org

Exemple en robotique

- On peut facilement caractériser la distribution *(pdf)* notre capteur



- Ultimement on cherche la distribution $p(x|z)$ *(où suis-je)*, à partir d'une mesure* (z = 1.234 m, par exemple) et de $p(z|x)$

*ou une série de mesures

Théorème de Bayes

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

octobre 2012

- On laisse souvent tomber le dénominateur, car c'est juste une constante de normalisation indépendante de A

$$\boxed{P(A|B)} \propto \boxed{P(B|A)}\boxed{P(A)}$$

nouvelle croyance sur A — observe nouvelle évidence B — *prior (a priori)*

Interprétation

(on va souvent y revenir pour démystifier le tout....)

UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple Bayes Discret

- Vous passez un test médical pour la maladie M. Le test est positif (T). Souffrez-vous de la maladie M?

M → malade
m → non-malade
T → test positif
t → test négatif

- On cherche $P(M|T)$
- Le fabricant du test nous donne
  $P(T|M)$=0.92 et $P(T|m)$=0.05
  note : $P(t|M) = 1\text{-}P(T|M)$
- *prior*
  Le corps médical nous donne $P(M)$=0.01

$$\boxed{P(M\,|\,T) = \frac{P(T\,|\,M)P(M)}{P(T)}}$$

manque $P(T)$

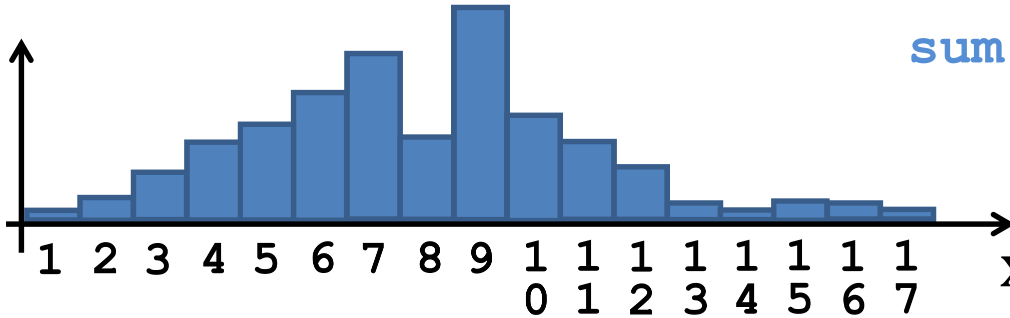
P(T)= P(T,M) + P(T,m) loi prob. totale. Une personne est malade ou ne l'est pas, mais pas les 2.
P(T)= P(T|M)P(M) + P(T|m)P(m)
P(T)= 0.92*0.01 + 0.05(1-0.01)
P(T)= 0.0587 ← probabilité que si je prends une personne au hasard, elle aura un test positif

$$P(M\,|\,T) = \frac{0.92\times 0.01}{0.0587} = 0.1567$$ Important! C'est moins que $P(T|M)$=0.92

Bayes pour des distributions discrètes

a priori p[x]

vecteur x :



`sum(x)` égale 1

J'ai la mesure z_t

est-ce que ma mesure $\boldsymbol{z_t}$ *est vraisemblable, pour cette position* ***x****?*

Je veux mettre à jour ma croyance $p[x]$

$$p(x \mid z = z_t) = \frac{\overbrace{p(z = z_t \mid x)} \, p[x]}{\boxed{\sum_x \{ p(z = z_t \mid x) \, p[x] \}}}$$

```
for index = 1:size(x,2)
    px_z(index) = PdfCapteurFunc(zt,x(index))*px(index);
end
NormalizeFactor = 1/sum(px_z);
px_z = px_z*NormalizeFactor;
```

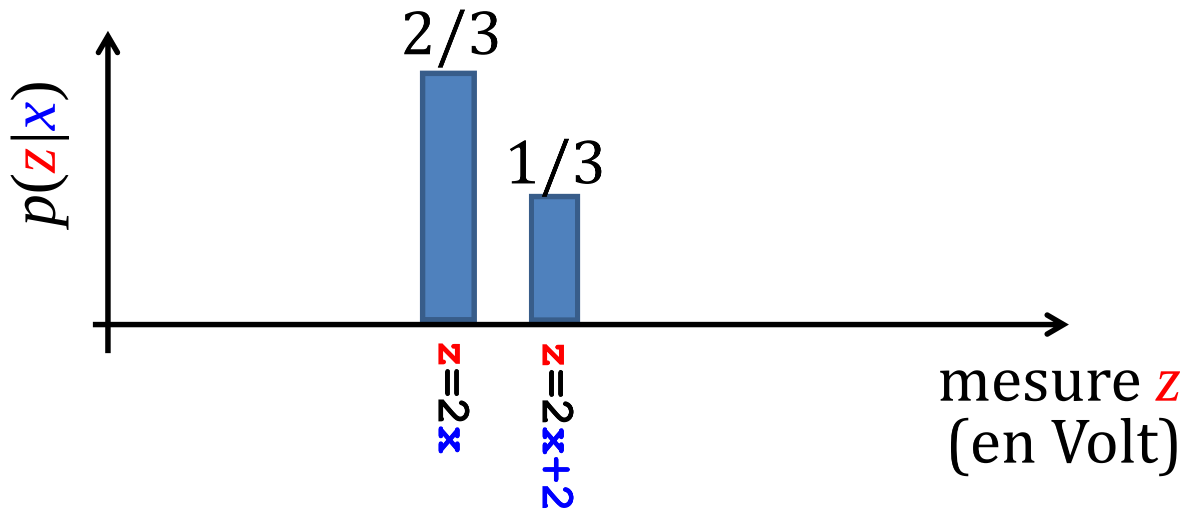
normalisation

Toute la connaissance du capteur est codée dans la fonction ***p(z|x)***!

(et je n'ai plus à inverser la fonction du capteur!)

Exemple 1 : distribution discrète

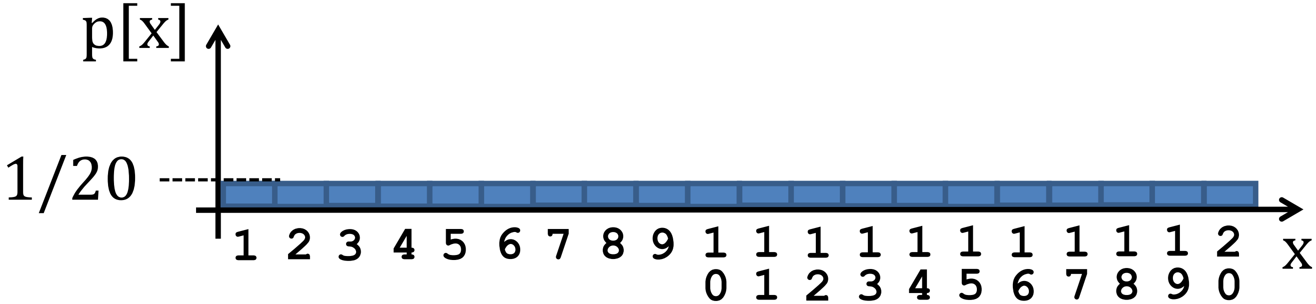
- Fonction de capteur $p(z|x)$:

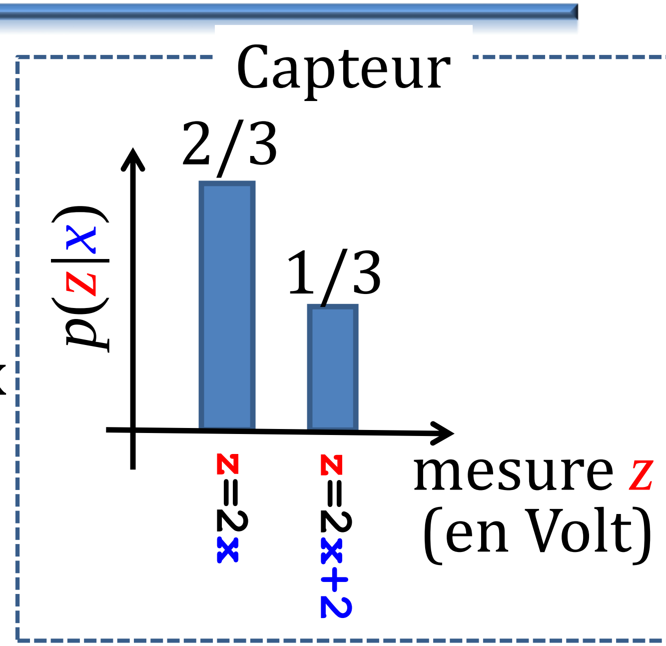


- Par exemple, si le robot est à x=**9**, alors :
  - le capteur retournera la mesure **18** ***Volts*** 67% du temps
  - " " " " " **20** ***Volts*** 33% " "

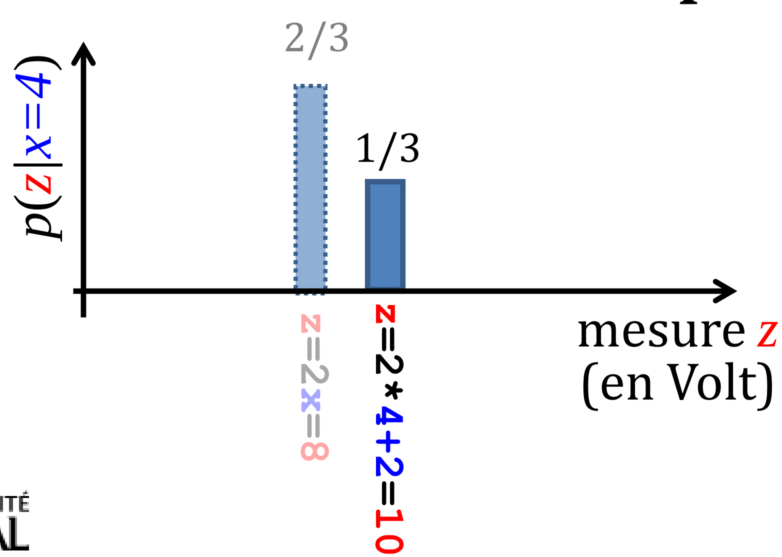
Exemple 1 : prior uniforme, 1ère mesure

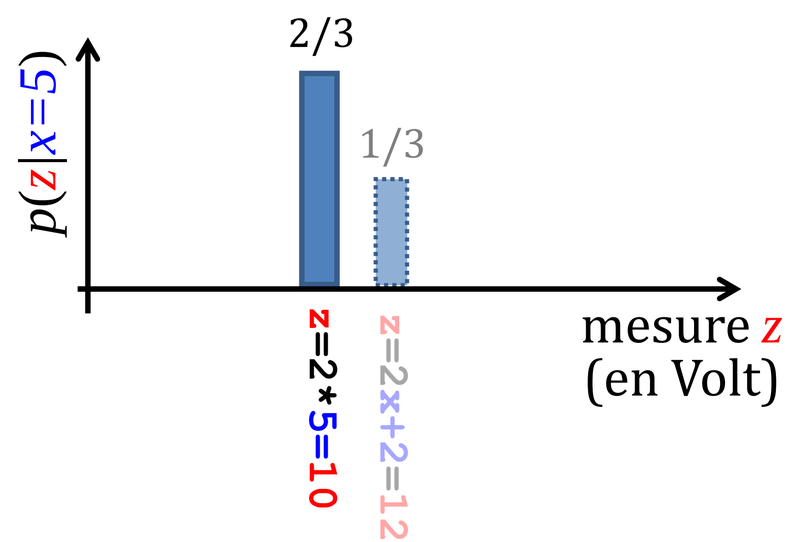
- Prior uniforme sur *x* :





- Mesure z=10 Volts
- Les deux seuls *x* compatibles :



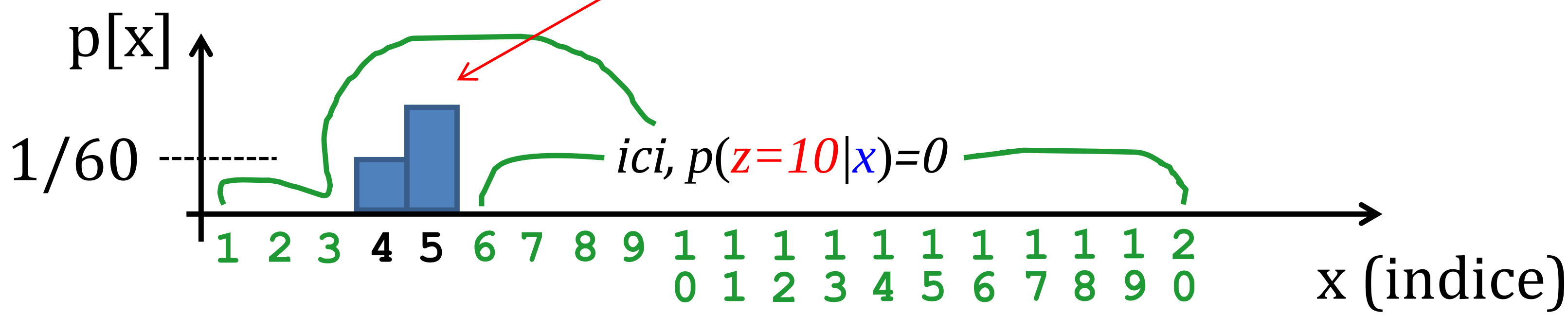


UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple 1 : prior uniforme, 1ère mesure

- Prior uniforme sur x :

Notez comment la distribution est miroir de ceux en bas



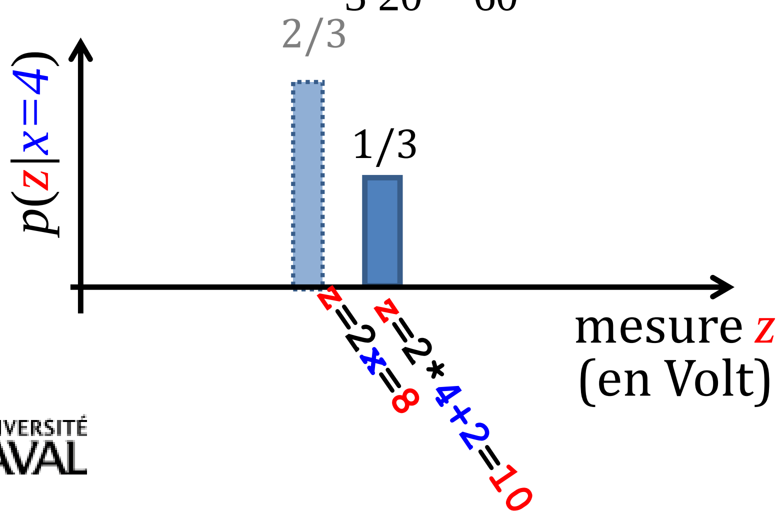
- *(en passant par-dessus les mises à jour mettant à 0 p(x|z))*

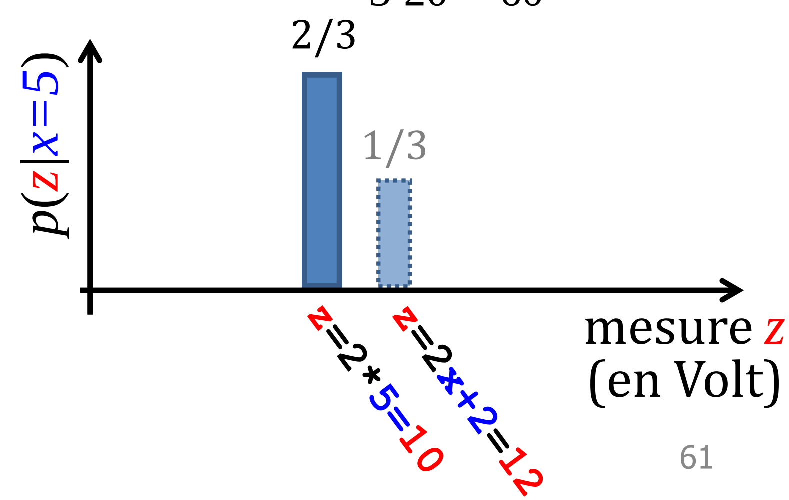
$$p(x=4\,|\,z=10) \propto p(z=10\,|\,x=4)\,p(x=4)$$

$$p(x=4\,|\,z=10) \propto \frac{1}{3}\frac{1}{20} = \frac{1}{60}$$

$$p(x=5\,|\,z=10) \propto p(z=10\,|\,x=5)\,p(x=5)$$

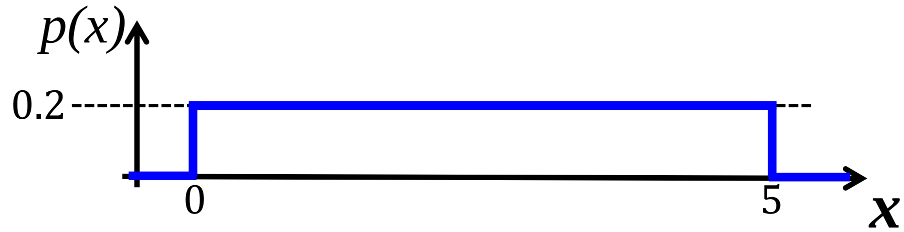
$$p(x=5\,|\,z=10) \propto \frac{2}{3}\frac{1}{20} = \frac{2}{60}$$





Exemple Bayes 2

Prior uniforme $p(x)$
(indique qu'on ne sait pas où on se trouve)



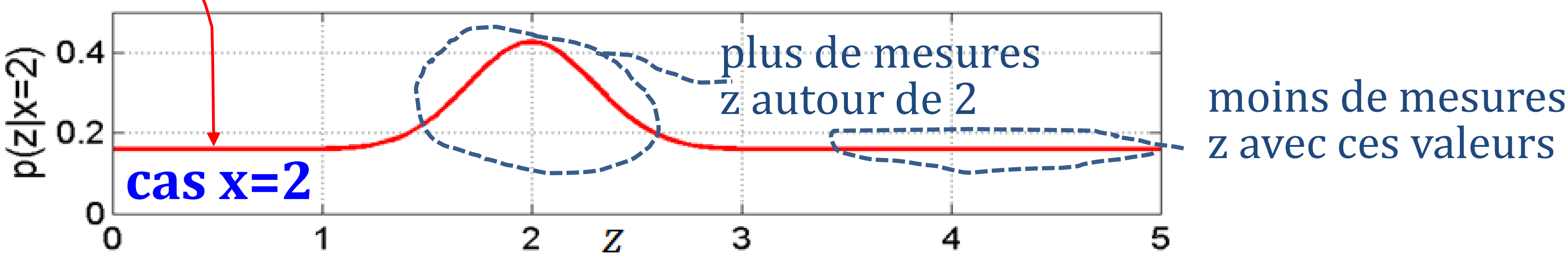
Capteur très boiteux!

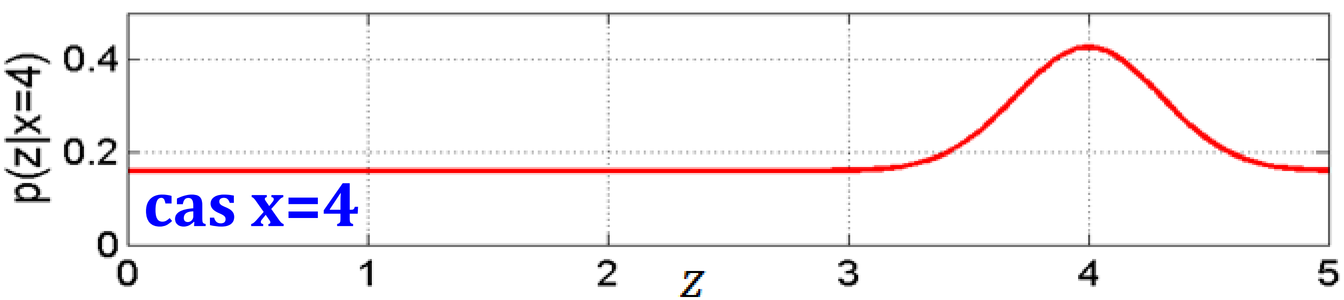
- 80% retourne une valeur au hasard entre 0 et 5
- 20% pige dans une normale $N(\mu = \textit{vrai position}, \sigma^2 = 0.3^2)$

$$\boxed{p(z \mid x) = 0.80\,\frac{1}{5} + 0.20\,\frac{1}{0.3\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(z-x)^2}{2\cdot 0.3^2}}}$$

fonction en z
seulement

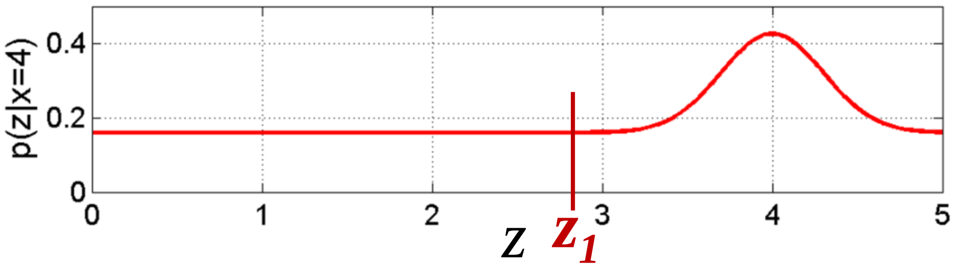
une fonction pour
chaque x





Exemple Bayes 2 : Simulation et calcul

Vrai position : x=4!



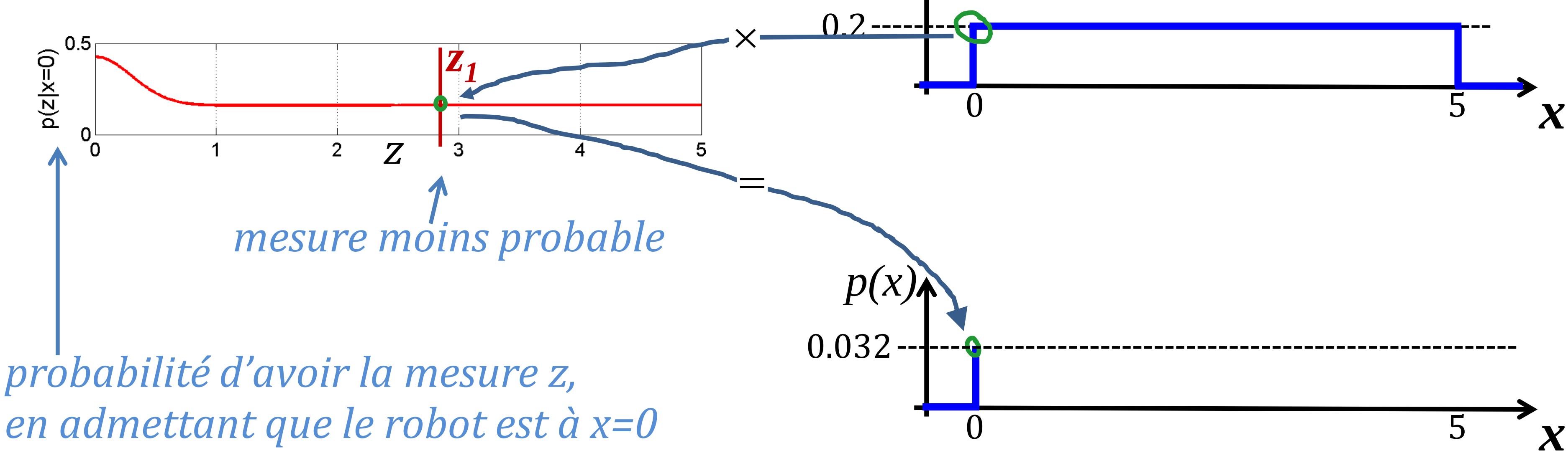
Pige une mesure z_t dans p(z|x=4), pour simuler une mesure bruitée

Attention! dans un vrai système on ferait une lecture du capteur

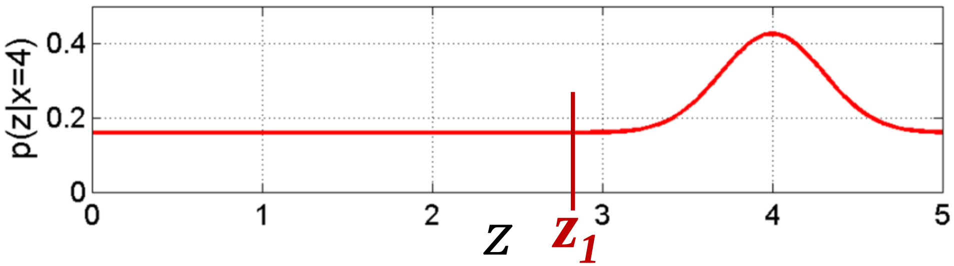
Incorporer la mesure z_t dans notre croyance (*bel(x)*) représentée par p(x)

$$\boxed{p(x \mid z = z_t) = p(z = z_t \mid x)\, p(x)}$$

il faut calculer pour chaque x



Exemple Bayes 2 : Simulation et calcul

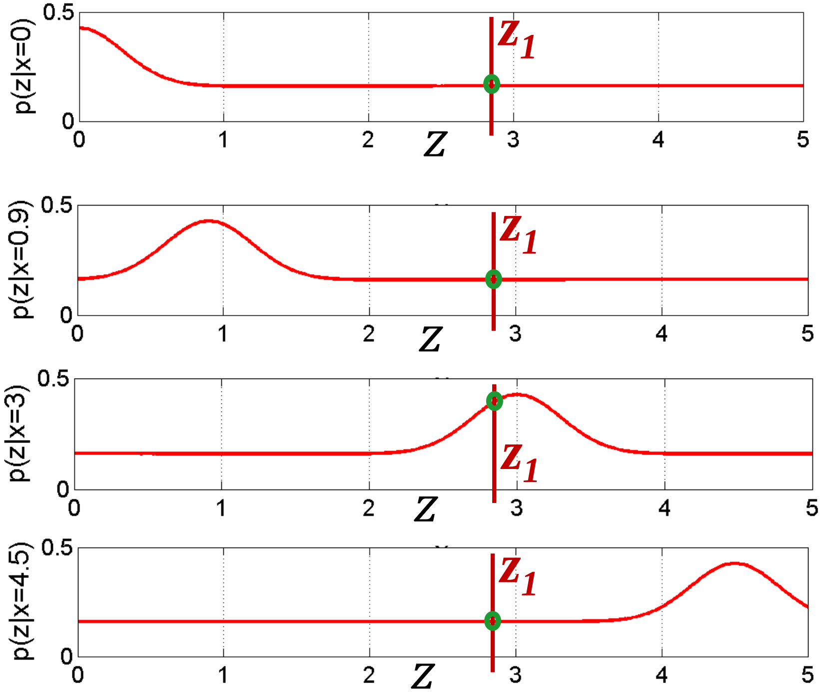


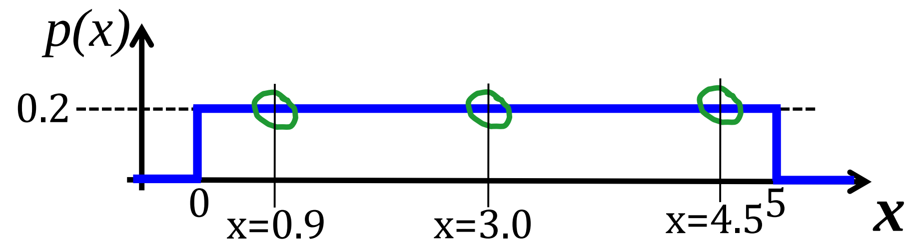
Pige une mesure z_t dans p(z|x=4), pour simuler une mesure bruitée

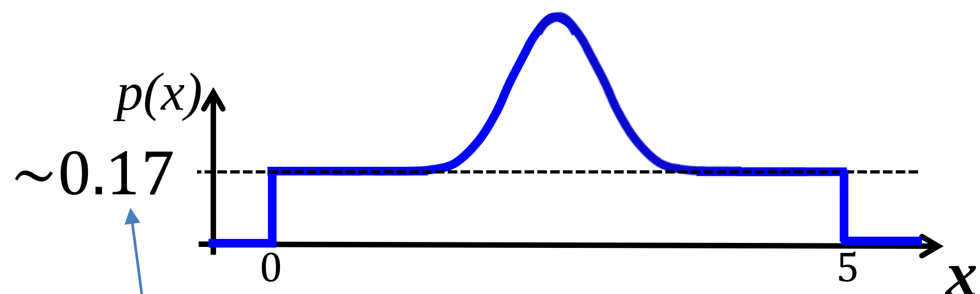
Attention! dans un vrai système on ferait une lecture du capteur

Incorporer la mesure z_t dans notre croyance (bel(x)) représentée par p(x)

$$p(x \mid z = z_t) = p(z = z_t \mid x)\, p(x)$$



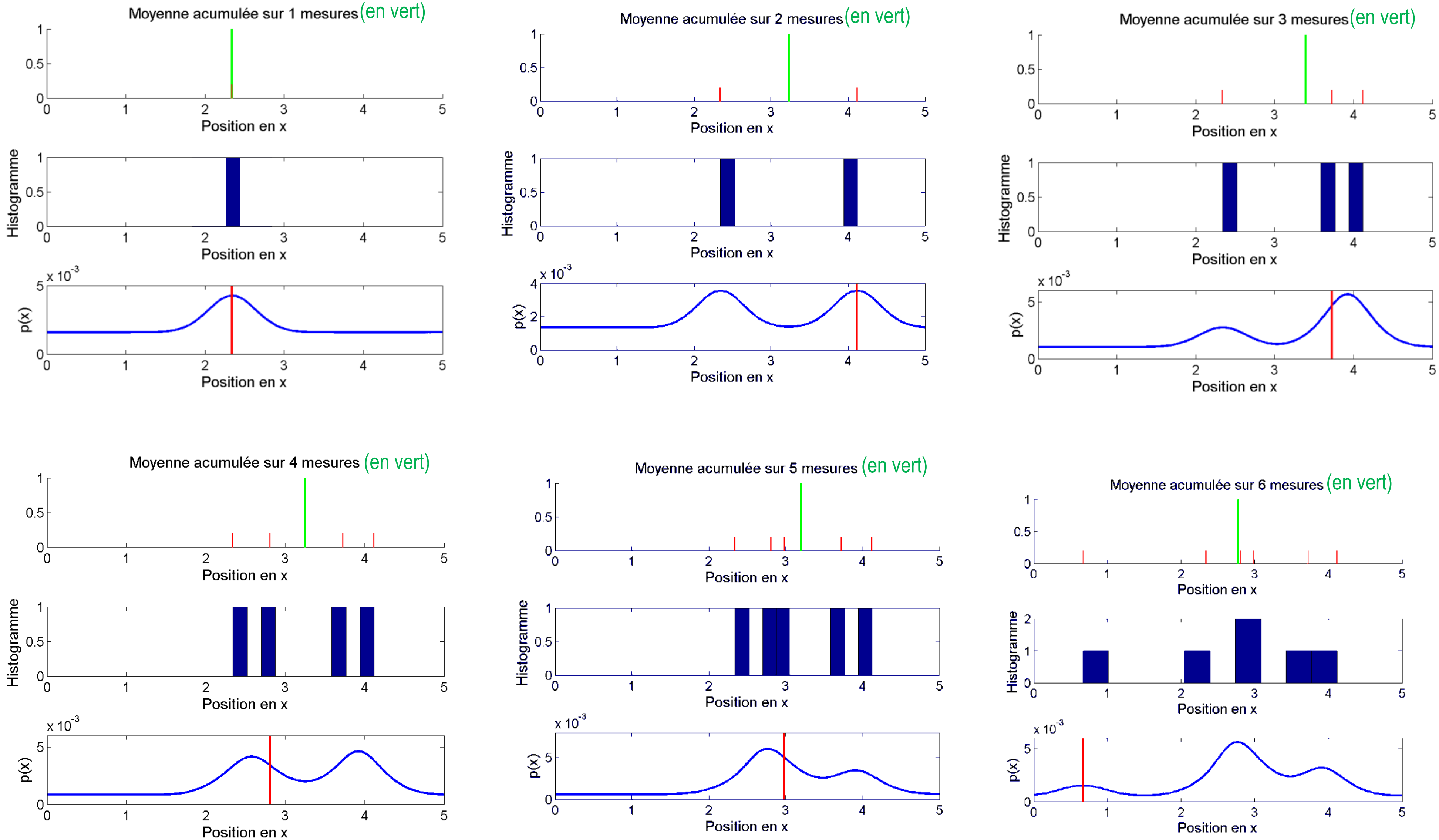




(après normalisation)

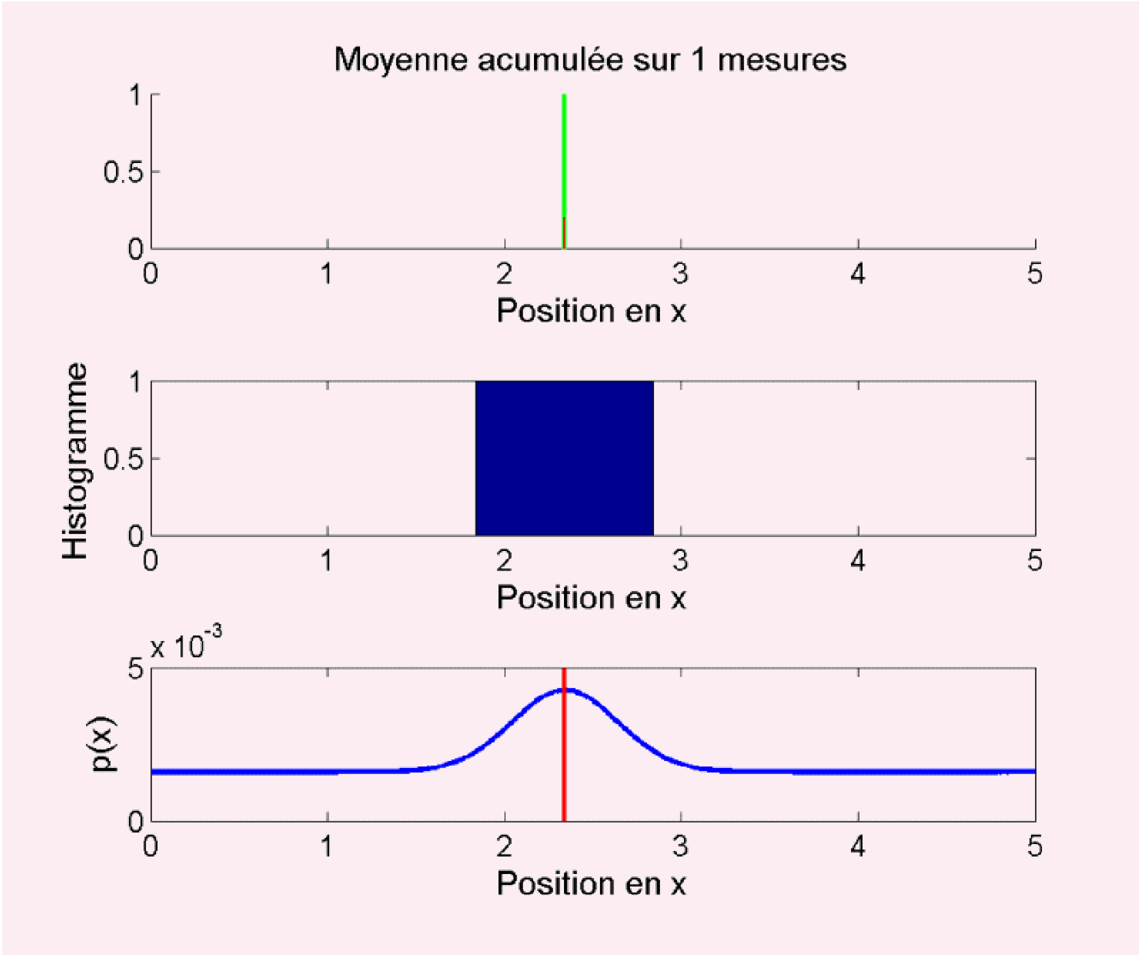
Exemple Bayes 2 : premières mesures

Vrai position : x=4!



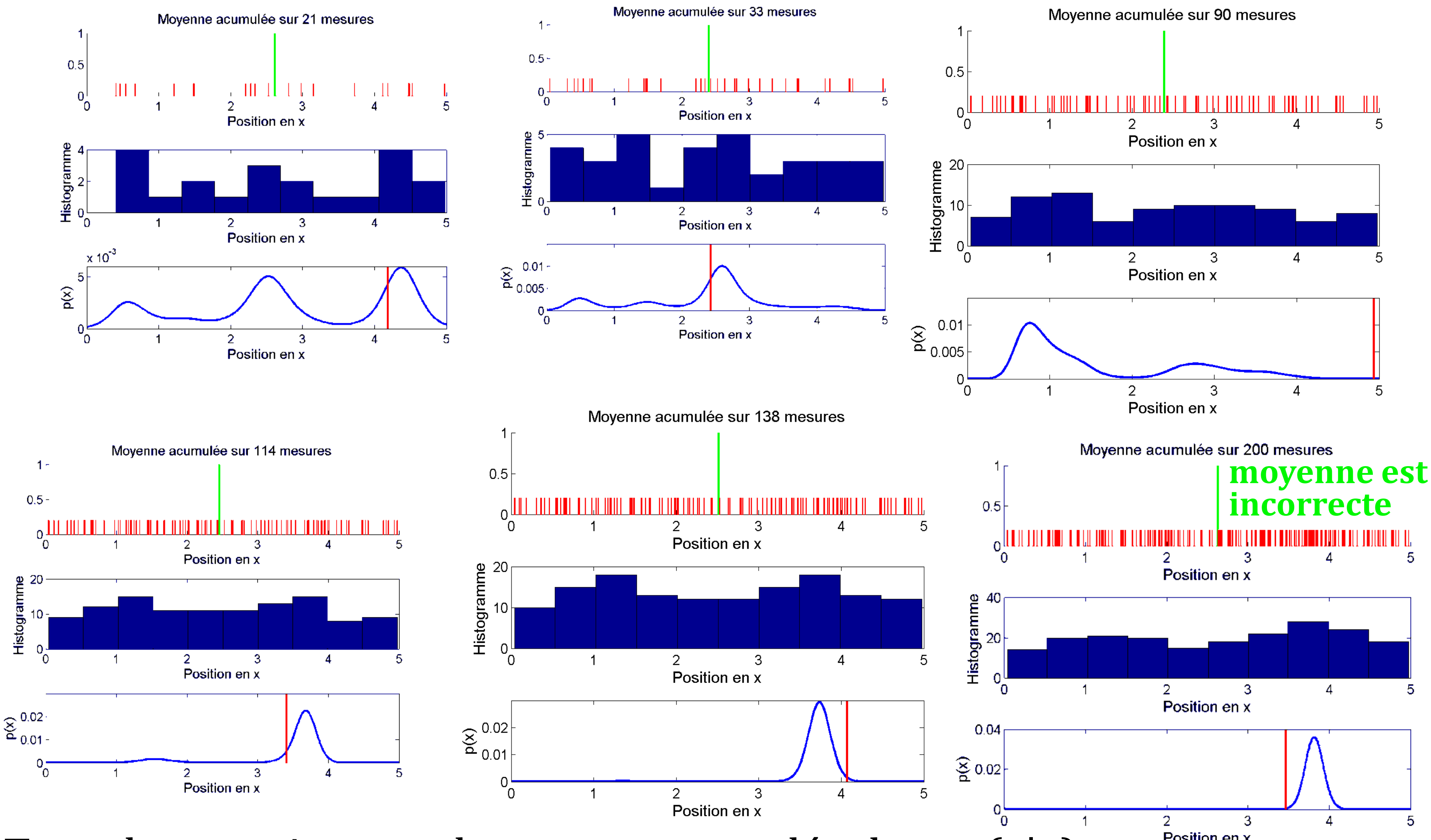
Exemple Bayes 2 : animation

Vrai position : x=**4**!



Exemple Bayes 2 : en accéléré…

Vrai position : x=**4**!

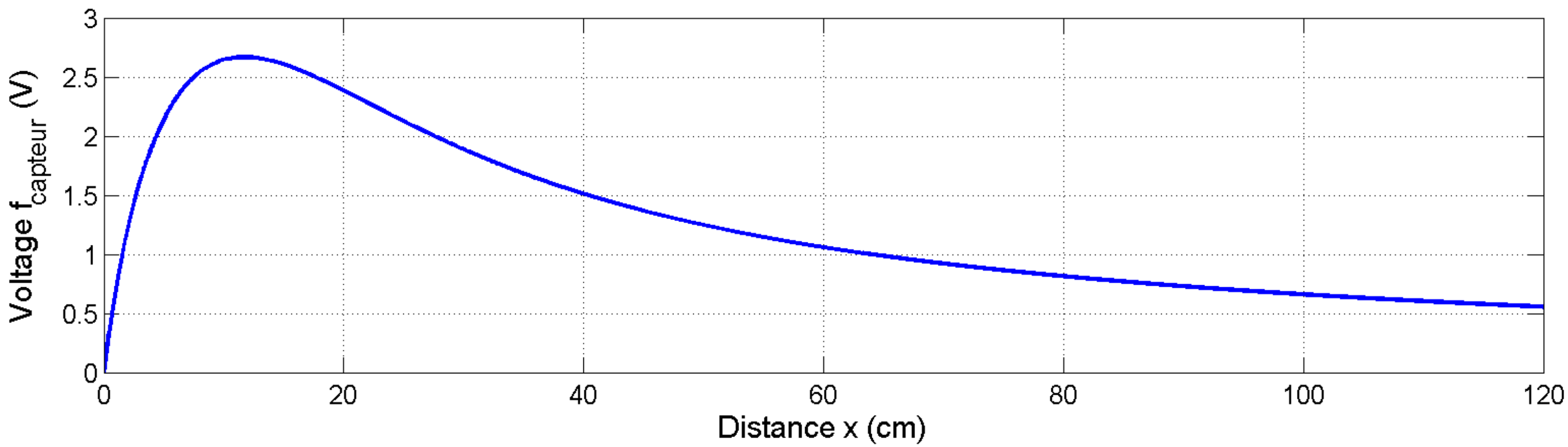


Toute la connaissance du capteur est codée dans p(z|x).
C’est tout ce que Bayes a eu besoin!

Exemple 3 : capteur non-bijectif

- La fonction du capteur non-bruitée est :

$$f(x) = 70\tanh(0.07x)/(x+6)$$

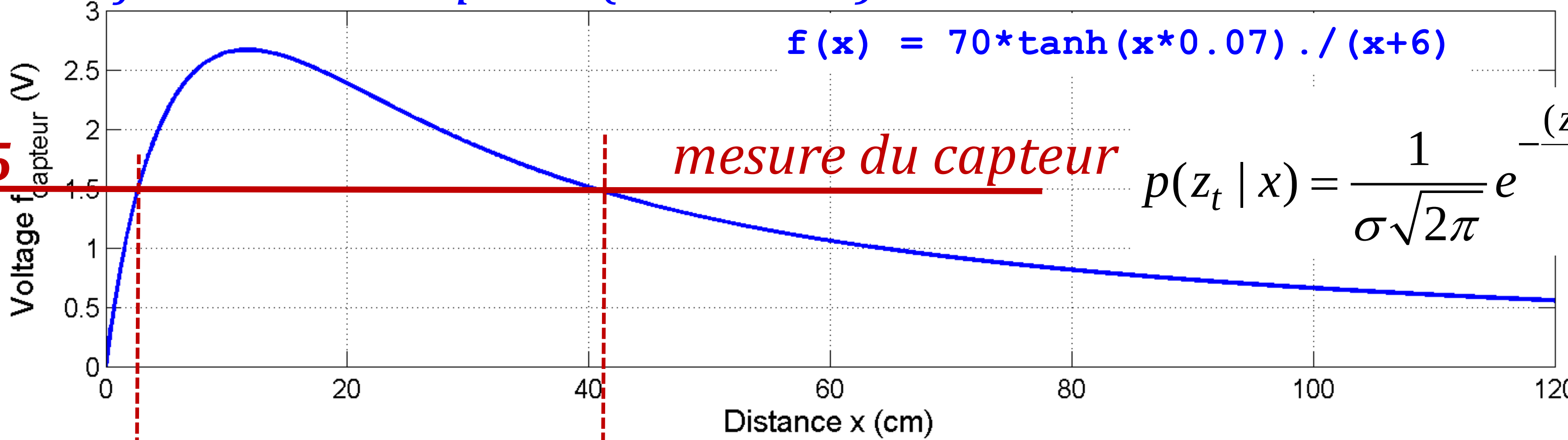


- Un bruit gaussien est présent sur le voltage

$$z(x) \sim N(f(x),\sigma^2)$$

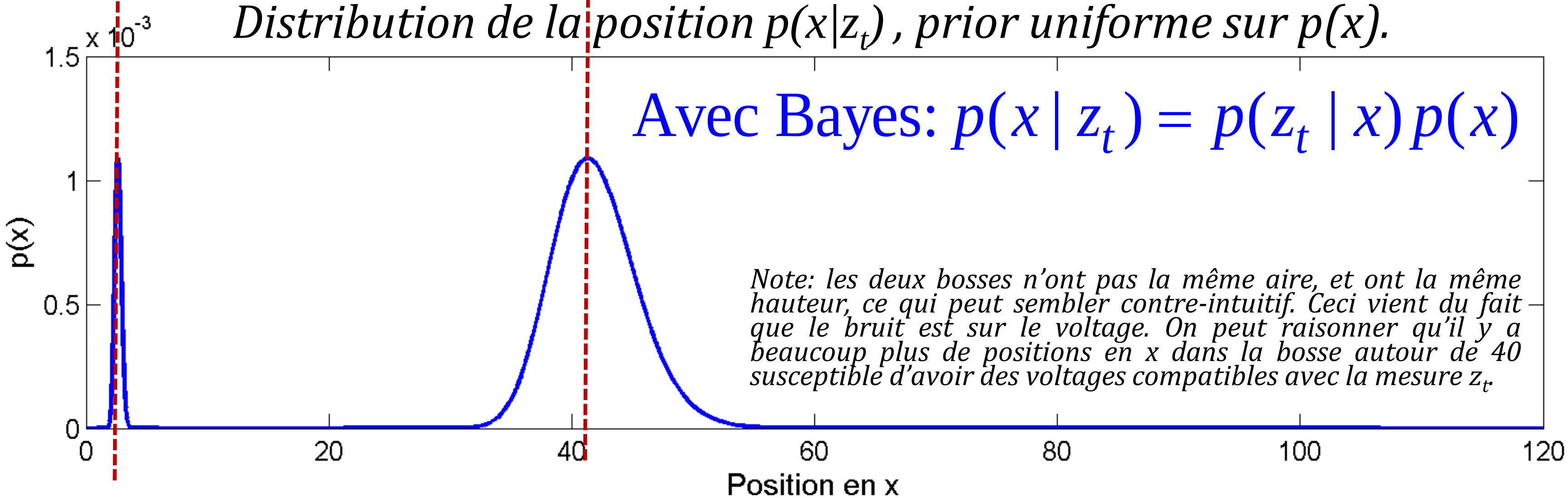
Bayes « inverse » le capteur : $z \rightarrow x$

fonction du capteur (sans bruit)



$$p(z_t \mid x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_t - f(x))^2}{2\sigma^2}}$$

Distribution de la position $p(x|z_t)$, prior uniforme sur $p(x)$.



Avec Bayes: $p(x \mid z_t) = p(z_t \mid x)\, p(x)$

Note: les deux bosses n'ont pas la même aire, et ont la même hauteur, ce qui peut sembler contre-intuitif. Ceci vient du fait que le bruit est sur le voltage. On peut raisonner qu'il y a beaucoup plus de positions en x dans la bosse autour de 40 susceptible d'avoir des voltages compatibles avec la mesure z_t.