Exercices pour le cours GLO-4001/GLO-7021
Introduction à la robotique mobile

1 Changements de coordonnées

Nous avons trois repères (systèmes de coordonnées) A, B et C. L'origine du repère B est situé à la coordonnées $(4, 5)$ dans le repère A, et est tourné d'un angle θ_1 de -25^o par rapport au repère A. L'origine du repère C est situé à la coordonnées $(4.2, -2.2)$ dans le repère B, et est tourné d'un angle θ_1 de -35^o par rapport au repère B. La coordonnées du points P dans le repère B est ${}^{B}P = (3, 6)$, et la coordonnées du point R dans le repère C est ${}^{C}R = (-1.1, 0.9)$. Le tout est illustré à la figure 1.

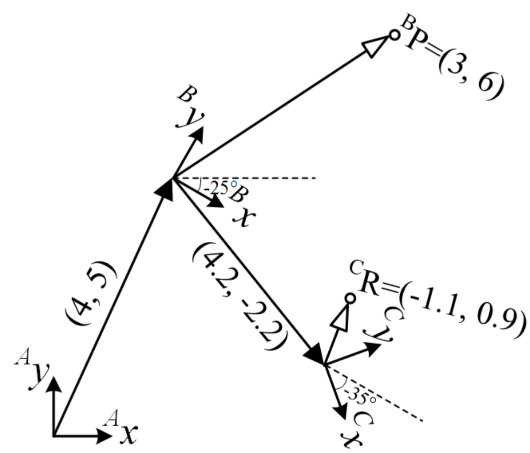

FIGURE 1 – Système de repères pour la question 1. Les lignes pointillées montrent les directions des axes x des repères précédents, pour bien illlustrer les rotations.

1.1 Coordonnée du point P dans le repère A

Trouvez la coordonnées du point P dans le repère A, i.e. trouvez ${}^{A}P$.

1.2 Coordonnée du point R dans le repère A

Trouvez la coordonnées du point R, dans le repère A, i.e. trouvez ${}^{A}R$

1.3 Coordonnée du point P dans le repère C

Trouvez la coordonnées du point P dans le repère C, i.e. trouvez ${}^{C}P$. Indice : ceci implique d'inverser des matrices.

2 Réponses

Dans un premier temps, nous allons établir les différentes matrices nécessaires pour résoudre ce problème. La matrice T_1 sera celle qui fait la translation du repère B par rapport au repère A, et la matrice R_1 sera celle qui effectue la rotation de -25^o :

$$\mathbf{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R_1} = \begin{bmatrix} c(-25) & -s(-25) & 0 \\ s(-25) & c(-25) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où c et r sont les diminutifs de sin et cos.

La matrice T_2 sera celle qui fait la translation du repère C par rapport au repère B, et la matrice R_2 sera celle qui effectue la rotation de -35^o :

$$\mathbf{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4.2 \\ 0 & 1 & -2.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R_2} = \begin{bmatrix} c(-35) & -s(-35) & 0 \\ s(-35) & c(-35) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

2.1 Coordonnée du point P dans le repère A

$$^{A}P = \mathbf{T_1 R_1}{}^{B}P = \begin{bmatrix} c(-25) & -s(-25) & 4 \\ s(-25) & c(-25) & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0.9063 & 0.4226 & 4 \\ -0.4226 & 0.9063 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.2546 \\ 9.1700 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La coordonnée est donc $^{A}P = (9.2546, 9.1700)$. Note : on a utilisé ici le raccourci de multiplication **TR** vu en classe.

2.2 Coordonnée du point R dans le repère A

$$^{A}R = \mathbf{T_1 R_1 T_2 R_2}{}^{C}R = \begin{bmatrix} c(-25) & -s(-25) & 4 \\ s(-25) & c(-25) & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(-35) & -s(-35) & 4.2 \\ s(-35) & c(-35) & -2.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{C}R =$$

$$\begin{bmatrix} 0.9063 & 0.4226 & 4 \\ -0.4226 & 0.9063 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8192 & 0.5736 & 4.2 \\ -0.5736 & 0.8192 & -2.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.1 \\ 0.9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{5.5473}\ 7.1062 \\ \cancel{1.7338}\ 2.6338 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La coordonnée est donc $^{A}P = \cancel{(5.5473, 1.7338)} = (7.1062, 2.6338)$.

2.3 Coordonnée du point P dans le repère C

Ici c'est un peu plus complexe, car il faut trouver la transformation ${}^C_BH$ entre les repères C et B, pour pouvoir calculer cette coordonnée :

$$ {}^CP = {}^C_B H \; {}^BP $$

Nous savons que ${}^C_BH = {}^B_C H^{-1}$, et que ${}^B_CH = \mathbf{T_2R_2}$. Donc :

$$ {}^C_BH = (\mathbf{T_2R_2})^{-1} = \mathbf{R_2}^{-1}\mathbf{T_2}^{-1} $$

On a que $R^{-1} = R^T$, car la matrice de rotation est orthogonale. L'inverse de la matrice de translation s'obtient simplement en inversant le sens de la translation :

$$ \mathbf{T_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4.2 \\ 0 & 1 & 2.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

En mettant tout cela ensemble, nous obtenons :

$$ {}^C_BH = \begin{bmatrix} c(-35) & s(-35) & 0 \\ -s(-35) & c(-35) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4.2 \\ 0 & 1 & 2.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8192 & -0.5736 & -4.7023 \\ 0.5736 & 0.8192 & -0.6069 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

et la coordonnée ${}^CP$ est donc :

$$ {}^CP = \begin{bmatrix} 0.8192 & -0.5736 & -4.7023 \\ 0.5736 & 0.8192 & -0.6069 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.6863 \\ 6.0288 \\ 1 \end{bmatrix} $$

.