GLO-4001/GLO-7021 Introduction à la robotique mobile
Mise en pratique du filtre de Kalman, version 0.1

Philippe Giguère

22 novembre 2012

1 Introduction

Ce document ne constitue pas une explication du filtre de Kalman lui-même. Il se veut plutôt de présenter quelques exercises pour vous aider à mieux assimiler les connaissances présentées en classe. Il est fortement recommandé de lire les documents pointés sur le site web par rapport au filtre de Kalman lui-même.

1.1 Un peu de physique...

Les filtres de Kalman appliqués à la robotique mobile nécessitent une connaissance un tant soit peu minimale de la physique. En effet, les robots se déplacent en suivant les lois de la physique. Heureusement, elles sont assez simples pour les cas qui nous intéressent dans ce cours. Pour les systèmes accélérés, nous allons supposer que cette accélération est constante durant l'intervalle de temps T entre les échantillonnages par le système (et par le filtre qui tourne au même rythme). Pour ce système, la position est décrite selon cette équation :

$$x = x_0 + v_{x0}t + a_x\frac{t^2}{2} \tag{1}$$

et la vitesse est décrite par

$$v = v_{x0} + a_x t. \tag{2}$$

Notez que x_0 et v_{x0} sont la position et la vitesse au début de cet intervalle, respectivement. Pour les explications sur ces équations, je vous réfère directement au site suivant :

`http://www.cegep-ste-foy.qc.ca/profs/rfoy/capsules/mrua.html`

Notez que ces équations décrivent la physique pour un système à une dimension, soit l'axe des x.

1.2 Des équations physiques à un système linéaire matriciel

Si nous avons un système à une dimension et que les équations 1 et 2 s'appliquent, nous pouvons choisir d'avoir le vecteur d'état suivant :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \tag{3}$$

où x est la position, $\dot{x}$ est la vitesse (dérivée première en temps) et $\ddot{x}$ est l'accélération (dérivée seconde en temps). De façon matricielle, on peut représente l'évolution de ce système entre l'itération k et $k+1$ par :

$$\mathbf{X}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(k) \tag{4}$$

car si l'on fait cette multiplication au complet, on obtient

$$x(k+1) = 1 \cdot x(k) + T \cdot \dot{x}(k) + \frac{T^2}{2} \cdot \ddot{x}(k), \tag{5}$$

$$\dot{x}(k+1) = 1 \cdot \dot{x}(k) + T \cdot \ddot{x}(k) \tag{6}$$

et

$$\ddot{x}(k+1) = 1 \cdot \ddot{x}(k). \tag{7}$$

Vous devriez donc constater que les équation 1 et 5 sont identiques et que les équations 2 et 6 le sont aussi, lorsque l'on a $t = T$ ce qui correspond à la valeur de l'intervalle de temps.

2 Exemple Filtre de Kalman 1 : une fusée qui décolle

Imaginez une fusée au décollage, qui monte sur une ligne parfaitement droite et perpendiculaire au sol. Avec son moteur, vous êtes capable de contrôler son accélération. L'axe des x correspondra alors à l'altitude de la fusée, avec $x = 0$ représentant la fusée au sol. La fusée est équipée d'un capteur d'altitude au laser très bruité, dont l'équation est

$$h_l(\mathbf{X}) = 3x + \varepsilon_{laser} \tag{8}$$

avec $\varepsilon_{laser} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2_{laser})$ (variable pigée au hasard dans une distribution normale). Le facteur 3 ici indique que ce capteur retourne 3 Volt par mètre. (Pourquoi aie-je choisis ce capteur dans ce problème ? Pour que vous pussiez bien voir où le 3 apparaît dans les équations. Si ce capteur retourne 1 m/m, la matrice de mesure contiendrait un 1, ce qui rend l'aspect pédagogique moins intéressant.) L'accélération produite par le moteur est elle aussi corrompue par un bruit gaussien, qui capture à la fois les variations de poussée du moteur et les perturbations sur la fusée :

$$a = a_{moteur} + \varepsilon_{moteur}. \tag{9}$$

Notre système obéit aux lois de la physique des équations 1 et 2. Une petite différence ici pour la transition d'état est que l'accélération de la fusée est égale à a, qui est l'accélération de la fusée découlant de la poussée du moteur. Les équations de notre système sont donc :

$$x(k+1) = 1 \cdot x(k) + T \cdot \dot{x}(k) + \frac{T^2}{2} \cdot a(k), \tag{10}$$

$$\dot{x}(k+1) = 1 \cdot \dot{x}(k) + T \cdot a(k) \tag{11}$$

et

$$\ddot{x}(k+1) = 1 \cdot a(k). \tag{12}$$

La matrice de transition d'état Φ est donc :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

(Notez que pour cet exemple, nous aurions pu réduire la taille de notre vecteur d'état $\mathbf{X}$ à simplement $[x\ \dot{x}]^T$.) La matrice Γ reliant la commande $u(k) = a$ à l'état sera :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Pour vous convaincre de la justesse des équations 13 et 14, faites la multiplication de l'équation de prédiction du filtre de Kalman

$$\mathbf{X}(k+1|k) = \Phi\mathbf{X}(k) + \Gamma u(k) \tag{15}$$

avec $u(k) = a(k)$. Vous devriez retrouver les équations 10 à 12. La prédiction de la covariance du système sera :

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \Phi P(k)\Phi^T + \Gamma\sigma^2_{moteur}\Gamma^T \tag{16}$$

L'équation 16 est dans les acétates, mais plutôt du côté du filtre EKF. Il faut en effet convertir le bruit du moteur (bruit sur une accélération, en m/s^2) en bruit sur les vitesses et positions, ce que la matrice Γ fera pour nous automatiquement. Dans les acétates du filtre de Kalman linéaire, j'ai passé sous silence cet aspect, car j'assumais que le bruit était directement dans les unités du vecteur d'état $\mathbf{X}$.

Nous avons maintenant identifié deux des trois matrices du système de Kalman, en plus d'une des deux matrices de bruit. Il nous reste donc maintenant à trouver la matrice de mesure du système et la matrice de bruit sur les mesures. Reprenant l'équation 8, il est facile de voir que la matrice de mesure Λ est

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

car la fonction de mesure ne dépend que de x. Encore là, pour vous en convaincre vous n'avez qu'à faire l'équation de l'estimation de la mesure z du filtre de Kalman :

$$\hat{z}(k+1|k) = \Lambda\mathbf{X}(k+1|k) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = 3x \tag{18}$$

Bien entendu, le terme ε_{laser} n'apparait pas ici, car le filtre n'estime que la mesure non-bruitée. La matrice de bruit C_w, directement dans les unités de mesure du capteur, est celle qui est généralement fournie par le manufacturier de l'équipement. C'est aussi elle qui va faire que le filtre tient compte de ε_{laser}. Nous allons donc prendre simplement celle que je vous donne :

$$C_w = \begin{bmatrix} \sigma^2_{laser} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Voilà ! Votre filtre est donc prêt à être utilisé !

2.1 Résultat de la simulation

Comme notre fusée est immobile sur le pas de tir au début et à une position exactement connue, nous allons initialiser notre filtre aux valeurs suivantes :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

et

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

L'accélération de la fusée sera constante : $a = 5m/s^2$. Les bruits utilisés pour la simulation sont $\sigma_{moteur} = 0.5m/s^2$ et $\sigma_{laser} = 10m$, et l'intervalle de temps est $T = 0.1$. Le résultat de la simulation est montrée à la Fig. 2. On y voit clairement que l'estimation de l'altitude est de beaucoup supérieure avec le filtre de Kalman, pratiquement par un facteur 10.

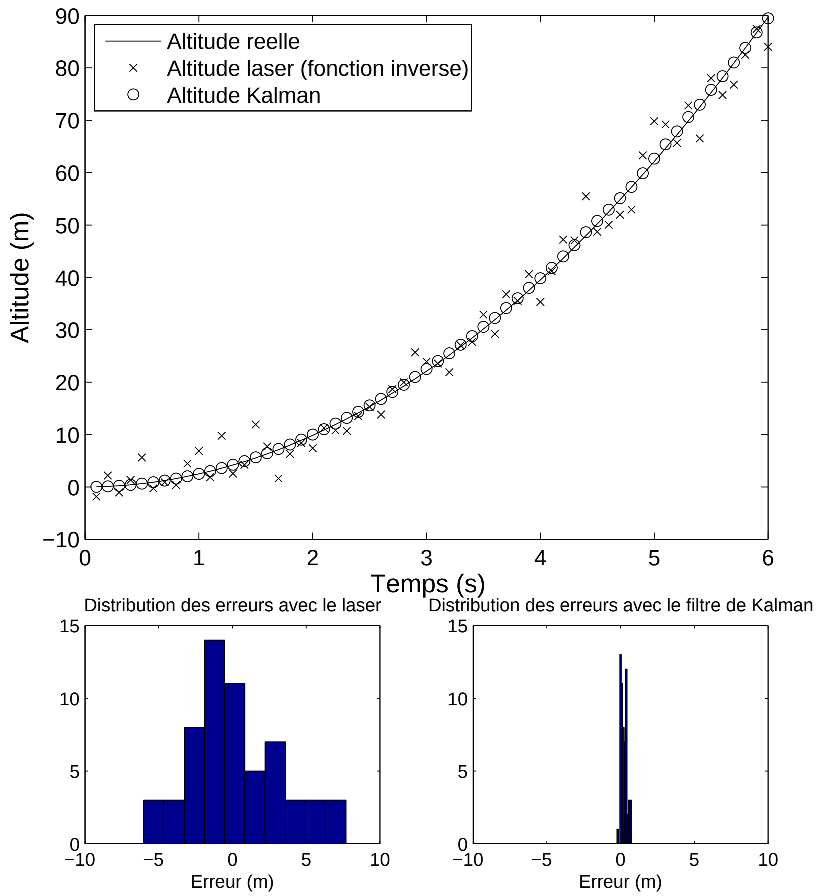

FIGURE 1 – Simulation du décollage de la fusée, dans matlab.

3 Exemple Filtre de Kalman 2 : Pont roulant X-Y

Il existe de nombreux exemples de systèmes mécaniques en deux dimensions, où les axes x et y sont parfaitement découplés. Un exemple est un pont roulant, où un moteur effectue le déplacement d'un pont (axe x) et un autre moteur déplace un treuil le long de ce pont (axe y).

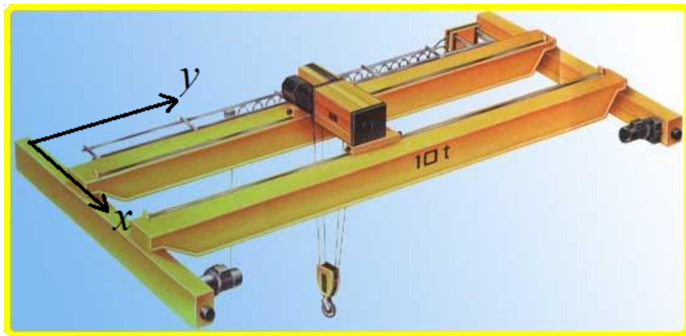

Figure 2 – Exemple d'un pont roulant, utilisé pour déplacer des charges dans un espace de travail ouvert dans une usine. Les déplacements en x et en y sont parfaitement découplés.

Pour ce deuxième exemple, nous allons avoir les modèles de capteurs suivants :

– un capteur laser pour mesurer la position en x, avec du bruit gaussien σ^2_{xlaser}, avec comme fonction
$$h_{xlaser} = 2x + \varepsilon_{xlaser} \tag{22}$$
– un capteur laser pour mesurer la position en y, avec du bruit gaussien σ^2_{ylaser} ;
$$h_{ylaser} = 3y + \varepsilon_{ylaser} \tag{23}$$
– un vélocimètre qui mesure la vitesse en y, avec du bruit gaussien σ^2_{yvel} ;
$$h_{yvelo} = 4\dot{y} + \varepsilon_{yvelo} \tag{24}$$

Pour ce système, nous allons donc avoir 3 capteurs et opérer en deux 2 degrés de liberté physiques. Tous les capteurs sont linéaires. Les moteurs sont intelligents et possèdent leur propre boucle d'asservissement [1]. Ils acceptent un signal d'entrée en volt, qui représente la vitesse de déplacement linéaire désirée, selon l'équation suivante
$$\dot{x} = 5u_x \tag{25}$$
$$\dot{y} = 6u_y \tag{26}$$

Le bruit pour ces deux moteurs est égal à $\sigma^2_{moteurX}$ et $\sigma^2_{moteurY}$. Le vecteur représentant l'état sera (dans les examens, je vais toujours vous donner ce vecteur) :
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \tag{27}$$

1. Je dis qu'ils ont une boucle d'asservissement car si vous donniez un voltage au moteur, vous devriez savoir que la vitesse de déplacement ne sera pas directement proportionnelle à ce voltage. Ici le voltage n'est qu'une façon de donner de l'information au moteur intelligent, et ne servira pas à alimenter les moteurs directement.

le vecteur de commande sera

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \tag{28}$$

et le vecteur de mesure sera

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} h_{xlaser} \\ h_{ylaser} \\ h_{yvelo} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Les matrices de bruits sont :

$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} \sigma^2_{moteurX} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{moteurY} \end{bmatrix} \tag{30}$$

et

$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} \sigma^2_{xlaser} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{ylaser} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{yvelo} \end{bmatrix} \tag{31}$$

car il n'y a pas de corrélation entre les bruits des capteurs.

Comme exercice, trouvez les trois matrices suivantes : Φ, Γ et Λ. Les réponses sont à la page suivante.

3.1 Réponse à la question du pont roulant

Les trois matrices sont les suivantes. Pour le changement d'état :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Pour la matrice reliant les commandes à l'état :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 5T & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6T \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{33}$$

et finalement la matrice de mesures

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Il est important de comprendre les dimensions de ces matrices. La matrice Φ doit toujours être carrée, et de taille $n \times n$, où n est la dimension du vecteur d'état. La matrice Γ doit être de taille $n \times c$, où c est la taille du vecteur de commande. Finalement, la matrice Λ est de taille $s \times n$, où s est le nombre de capteur.

3.2 Simulation du pont roulant

La figure 3 montre le résultat de la simulation matlab pour les paramètres suivants :

$$\sigma_{moteurX} = 0.02,\ \sigma_{moteurY} = 0.04,\ \sigma_{xlaser} = 0.2,\ \sigma_{ylaser} = 0.2,\ \sigma_{yvelo} = 0.1,\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ T = 0.1$$

La même variance sur les bruits a été utilisée dans la simulation pour bruiter les déplacements et les mesures. En temps normal, les variances du systèmes sont inconnues, et vous devez les estimer.

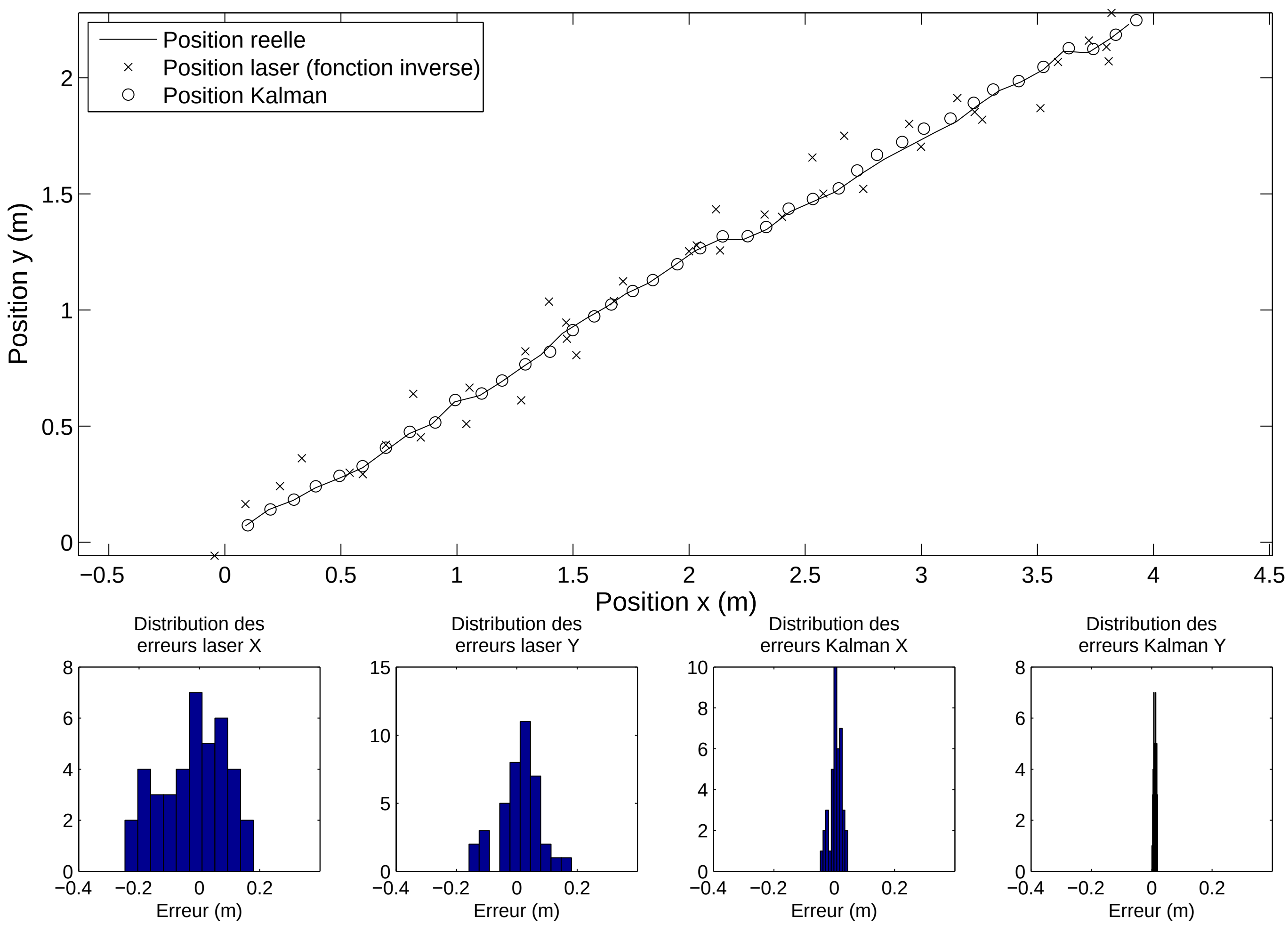

FIGURE 3 – Simulation du pont roulant, et distributions des différentes erreurs d'estimation.

4 Filtre de Kalman Étendu : fusée avec fonction de mesure non-linéaire

Pour ce problème, nous allons utiliser une fonction non-linéaire pour la mesure d'altitude. Nous allons conserver les équations linéaires de propagation, ce qui fait que l'on peut réutiliser les matrices Φ et Γ décrites aux équations 13 et 14, et le même bruit sur le moteur σ_{moteur}. Par contre, au lieu d'utiliser un laser pour mesurer l'altitude de la fusée, nous allons utiliser une jauge de pression atmosphérique. L'équation relatant l'altitude x (en mètres) à la pression p est la suivante :

$$p(x) = p_0 e^{-Cx} \tag{35}$$

où $p_0 = 101\ kPa^{\dagger}$ et $C = 1.244x10^{-4}$. L'équation 35 étant non-linéaire, nous devons utiliser un filtre de Kalman étendu (EKF) pour ce cas.

Lors de la mise-à-jour, le filtre de Kalman étendu va linéariser la fonction de mesure décrite à l'équation 35 autour de l'altitude x estimée par le filtre. La jacobienne de cette fonction sera :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial p}{\partial \ddot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cp_0 e^{-Cx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Le bruit sur le capteur est σ_p. Nous avons donc tous les éléments en main pour le filtre de Kalman étendu. Il ne faut pas oublier, par contre, que $\hat{z}$ est calculé avec l'équation 35 dans le filtre EKF, et non pas avec $\Lambda\mathbf{X}$ comme dans le filtre de Kalman.

†. kPa = kiloPascal. On pourrait utiliser une autre unité pour p_0 (psi par exemple).

4.1 Résultat de simulation

Les résultats sont pour les mêmes paramètres que dans la simulation de la section 2, sauf pour le bruit du capteur de pression qui est de $\sigma_p = 0.05\ kPa$. Pour retrouver l'altitude x à partir de la pression, nous avons utilisé l'équation suivante :

$$x = -\frac{\ln(\frac{p}{p_0})}{C} \tag{37}$$

Fait à noter, la simulation à la figure 4 n'est pas assez longue pour montrer que la précision du système diminuera avec l'altitude x, car la pente du capteur de pression diminue avec x.

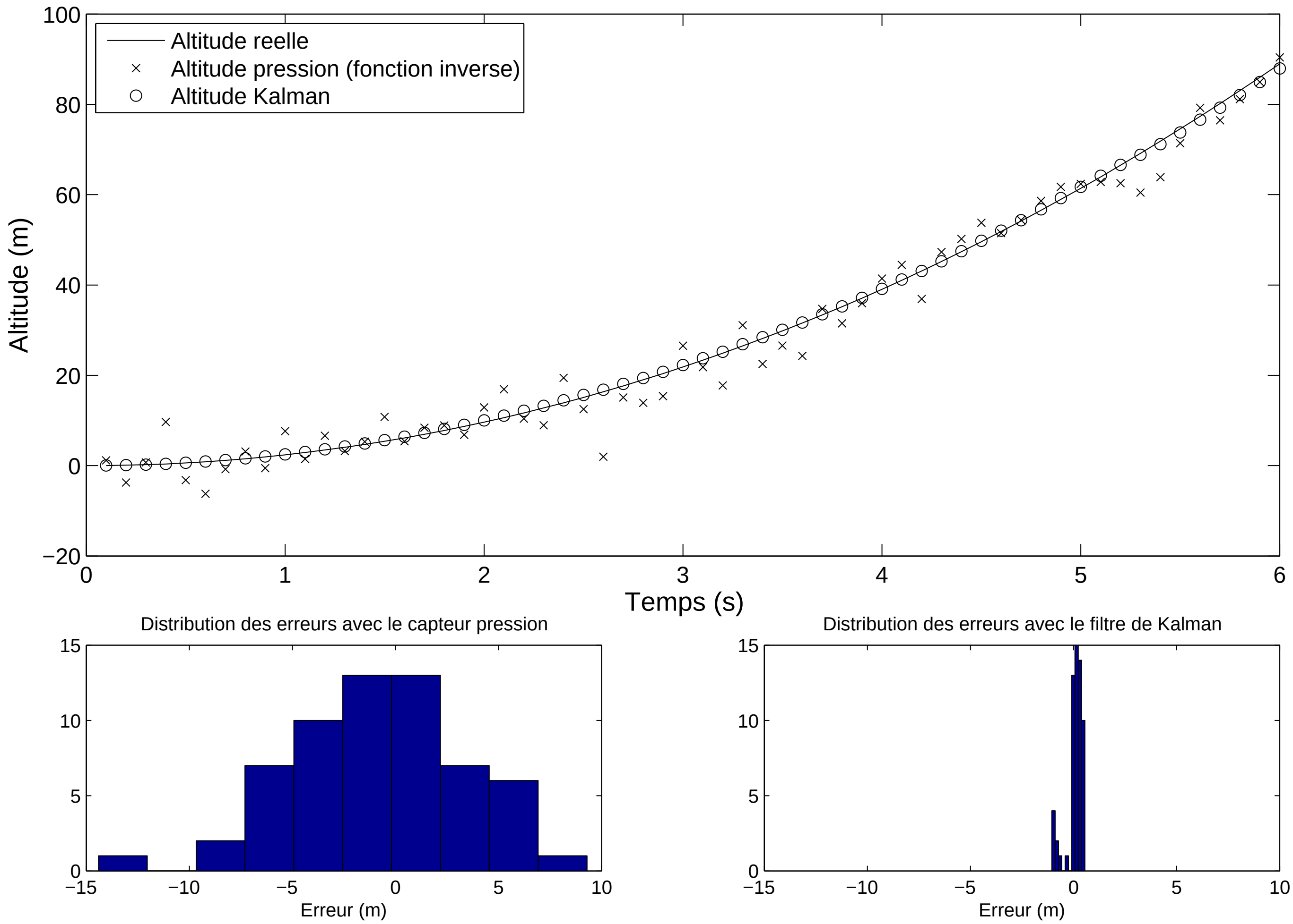

FIGURE 4 – Simulation du décollage de la fusée, avec capteur d'altitude non-linéaire.