Département d'informatique et de génie logiciel
Compression de données
IFT-4003 / IFT-7023

Notes de cours
Quantification scalaire

Édition Hiver 2012

Mohamed Haj Taieb
Local: PLT 2113
Courriel: mohamed.haj-taieb.1@ulaval.ca

Faculté des sciences et de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

UNIVERSITÉ LAVAL

Plan de la présentation

❑ Quantification scalaire:

- Processus de quantification
- Quantification uniforme
- Quantification adaptative

Mohamed Haj Taieb, Département de génie électrique et de génie informatique

Définition de la quantification

❑ Définition

- La quantification est le processus de représentation d'un grand ensemble de valeurs (voire infini) avec des valeur d'un ensemble plus petit.

❑ Exemple

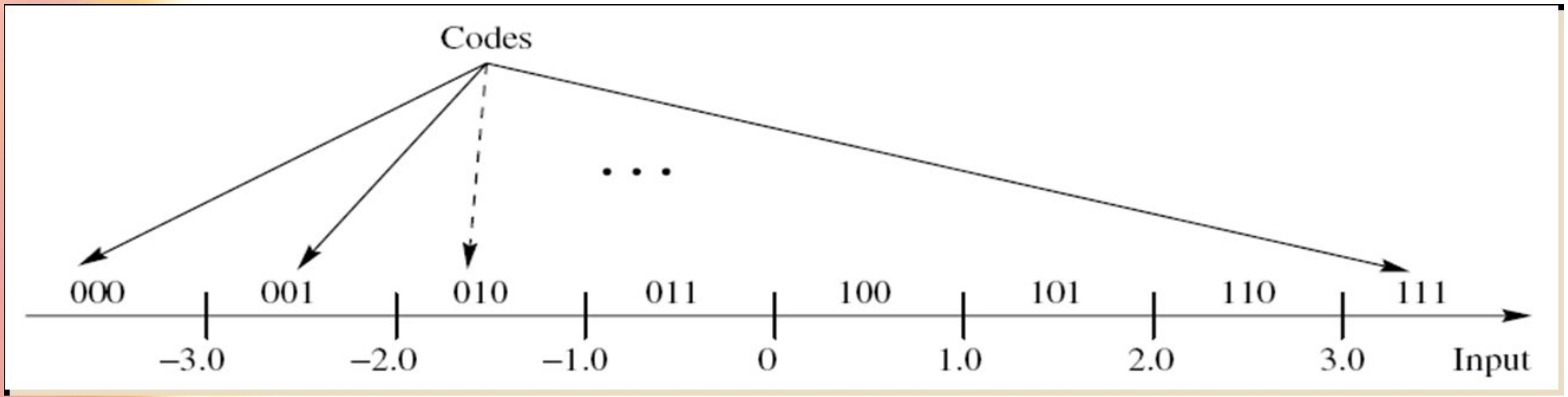
- Source: nombre réels de [-10.0, 10.0]
- Quantification: Q(x)=floor(x+0.5)=round(x)
- [-10.0, 10.0]→{-10, -9, …,-1, 0, 1, …, 9, 10}

❑ Scalaire vs vectorielle

- Scalaire: quantification appliquée aux scalaires.
- Vectorielle: quantification appliquée aux vecteurs.

Processus de quantification (1)

- Mapping à l’encodeur
  - Associe à un ensemble de valeurs un mot code.
  - Si la source est analogique → conversion A/N.
  - La connaissance de la source peut aider à spécifier la plage du quantificateur.
- Exemple de Mapping
  - Encodeur à 3bits.



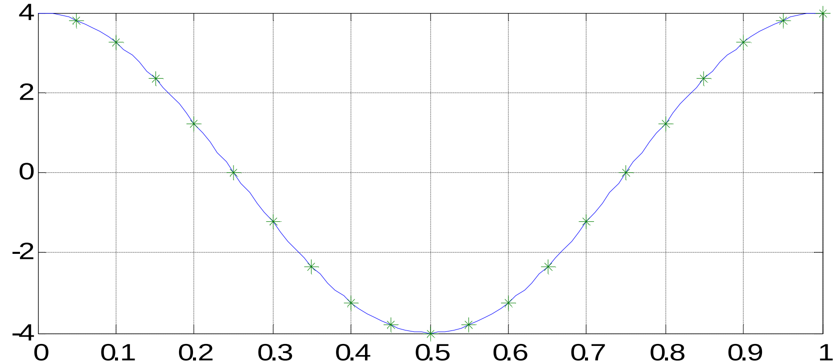
Processus de quantification (2)

- Mapping au décodage
  - Associe un mot code à une valeur dans une plage donnée.
  - Si le résultat du mapping est analogique → conversion N/A.
  - La connaissance de la distribution de source peut aider à choisir une meilleure approximation.
- Exemple de Mapping
  - Décodeur à 3bits.
  - Convertisseur N/A.

Input Codes	Output
000	−3.5
001	−2.5
010	−1.5
011	−0.5
100	0.5
101	1.5
110	2.5
111	3.5

Processus de quantification (3)

- <u>Exemple</u>
  - Soit une sinusoïde 4 cos(2πt) échantillonnée toute les 0.05 seconde.

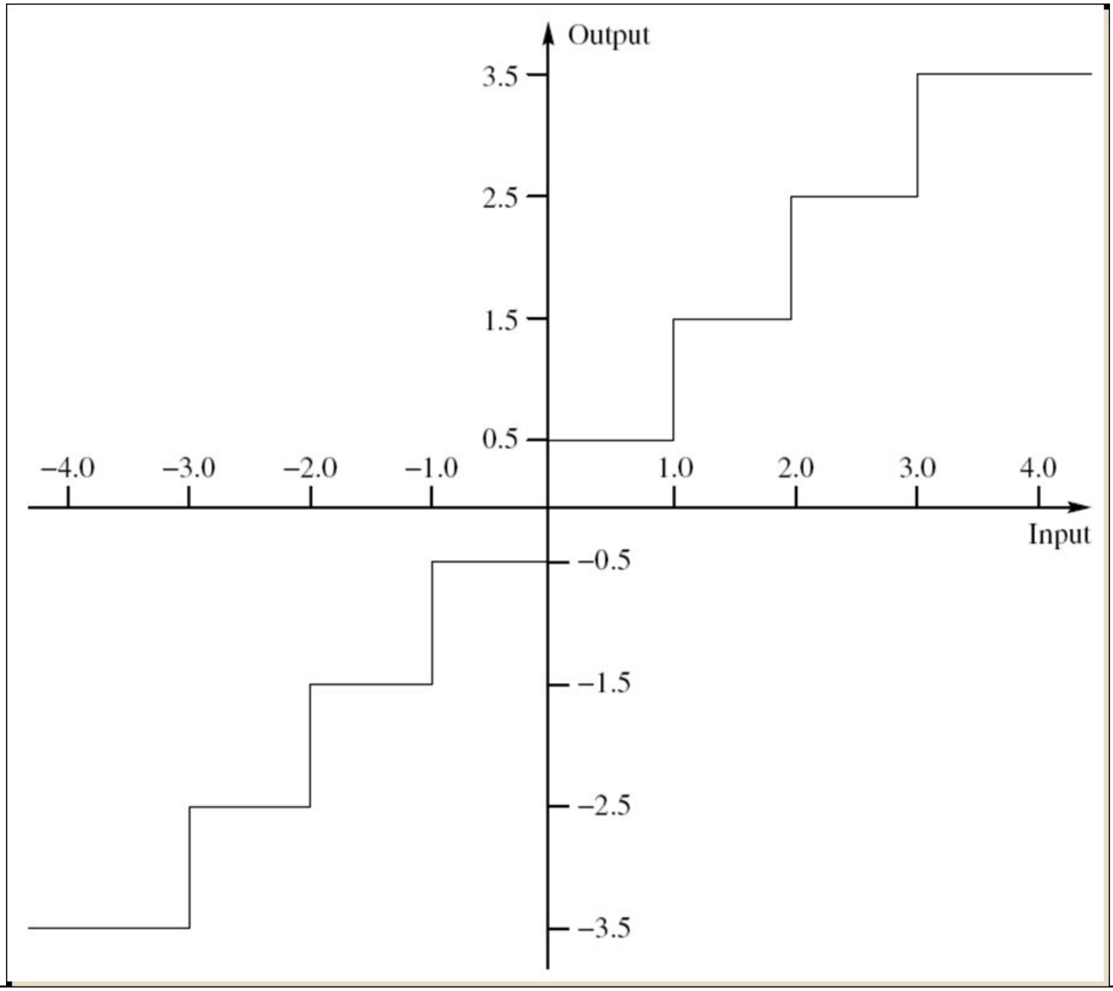


  - En utilisant les mapping à l'encodeur et au décodeur présentés précédemment on obtient:

t	$4\cos(2\pi t)$	A/D Output	D/A Output	Error
0.05	3.804	111	3.5	0.304
0.10	3.236	111	3.5	−0.264
0.15	2.351	110	2.5	−0.149
0.20	1.236	101	1.5	−0.264

Processus de quantification (4)

- Mapping entrée-sortie de quantification



Processus de quantification (5)

- Notations
  - X: variable aléatoire
  - $f_X(x)$: fonction densité de probabilité.
  - $\{b_i\}_{i=0..M}$: bornes de l'intervalle de quantification.
  - $\{y_i\}_{i=1..M}$: échantillons de reconstruction.
  - $Q(x)=y_i$ ssi $b_{i-1} \leq x < b_i$: fonction de quantification
- Erreur de quantification
  - Bruit de quantification, distorsion du quantificateur

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))^2 f_X(x)\,dx$$

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^{M} \int_{b_{i-1}}^{b_i} (x - y_i)^2 f_X(x)\,dx$$

- Débit de quantification

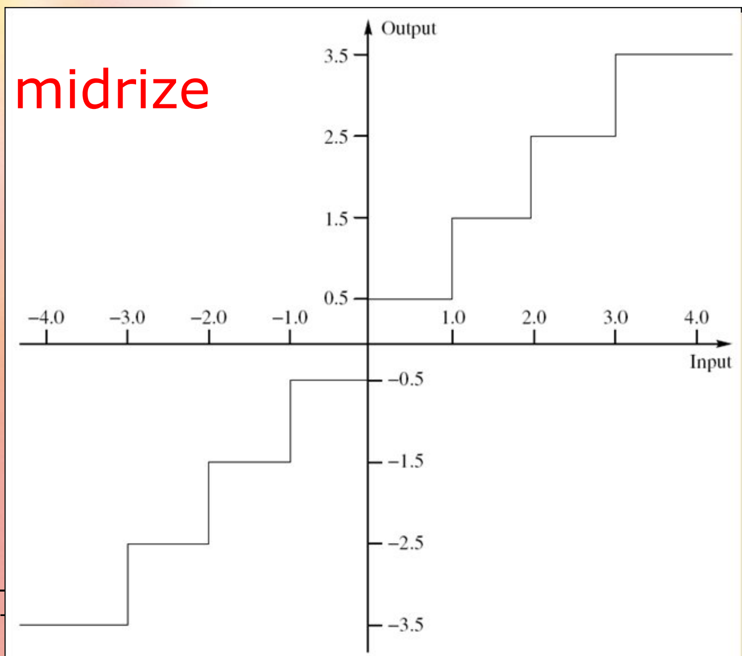
$$\left.\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{M} l_i P(y_i) \\ P(y_i) &= \int_{b_{i-1}}^{b_i} f_X(x)\,dx \end{aligned}\right\} \rightarrow R = \lceil \log_2 M \rceil \text{ pour un code de longeur fixe}$$

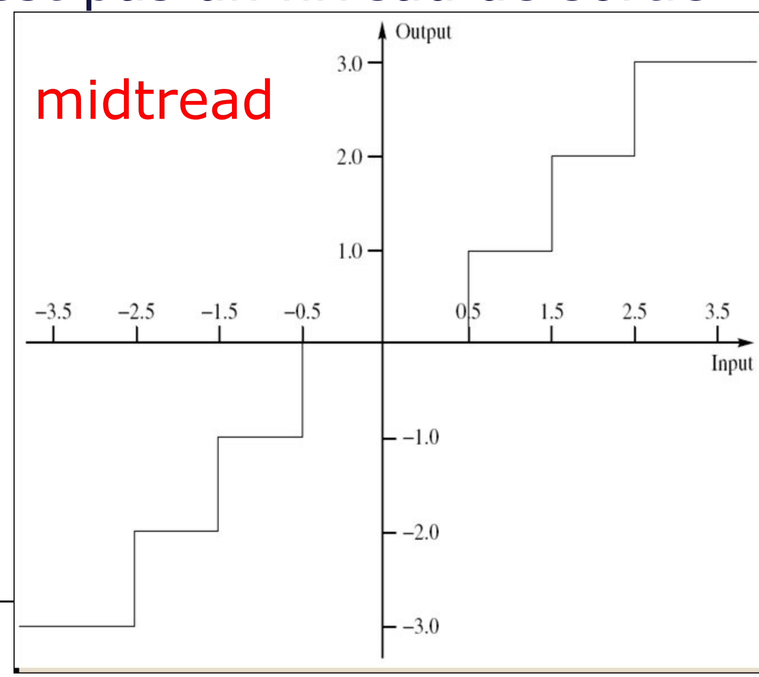
Mohamed Haj Taieb, Département de génie électrique et de génie informatique

Quantification uniforme (1)

❑ Propriétés

- Tout les intervalles sont de même tailles: $\Delta = b_i - b_{i-1}$
- La reconstruction utilise le point central de l'intervalle de quantification $[b_i, b_{i-1}) \rightarrow (b_i + b_{i-1})/2$
- Quantificateur midrize: 0 n'est pas un niveau de sortie.
- Quantificateur midtread: 0 est pas un niveau de sortie.





Quantification uniforme (2)

- Quantification uniforme d'une source uniforme
  - Source X ∈ [$-X_{max}$, X_{max}]
  - Quantificateur à M niveau → $\Delta=(2X_{max})/M$
  - Bruit de quantification:

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^{M} \int_{b_{i-1}}^{b_i} (x-y_i)^2 f_X(x)\,dx$$

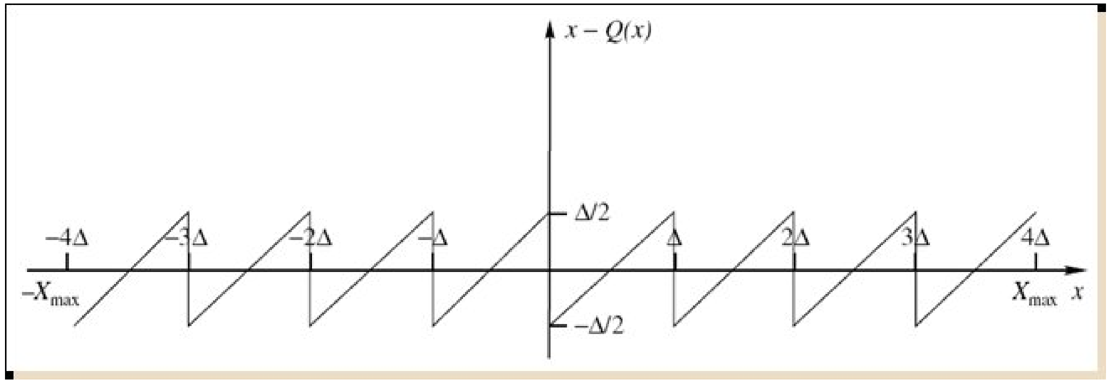
$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^{M} \int_{-X_{max}+(i-1)\Delta}^{-X_{max}+i\Delta} (x-(-X_{max}+(i-1)\Delta+\frac{\Delta}{2}))^2 \frac{1}{2X_{max}}dx$$

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^{M} \int_{-X_{max}+(i-1)\Delta}^{-X_{max}+i\Delta} (x+X_{max}-(i-1)\Delta-\frac{\Delta}{2}))^2 \frac{1}{2X_{max}}dx \quad (x \quad x+X_{max}-(i-1)\Delta-\frac{\Delta}{2})$$

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{2X_{max}}\sum_{i=1}^{M} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{1}{M\Delta} M \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{1}{\Delta}[\frac{x^3}{3}]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Quantification uniforme (3)

❑ Quantification uniforme d'une source uniforme [suite]



$$SNR(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{X_{\max}^2}{3}\frac{12}{\Delta^2}\right)$$

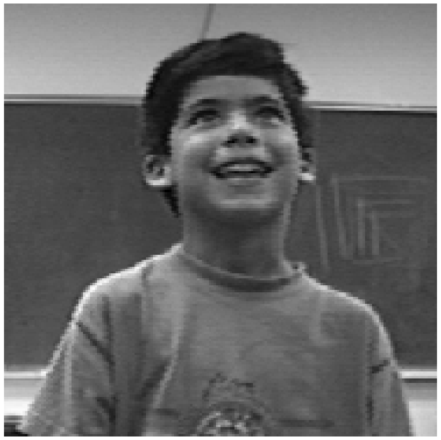
$$SNR(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{X_{\max}^2}{3}\frac{12}{\left(\frac{2X_{\max}}{M}\right)^2}\right) = 10\log_{10}(M^2)$$

$$SNR(dB) = 20\log_{10}(M) = 20\log_{10}(2^n) = n \cdot 20\log_{10}(2)$$

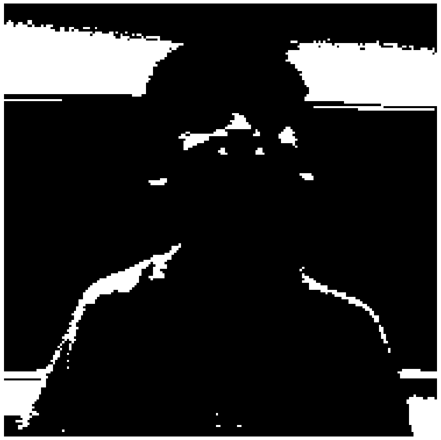
$$SNR(dB) = 6.02n\ dB$$

Compression d'image par quantification

originale: 8 bits/pixel



1 bit/pixel



2 bits/pixel

3 bits/pixel

Mohamed Haj Taieb, Département de génie électrique et de génie informatique

Quantification Adaptative

- Quantification uniforme vs quantification adaptative
  - Quantification uniforme: schéma statique pour tout les données.
  - Quantification adaptative: varier le quantificateur en fonction des statistiques locales des données.
- Quantification adaptative hors ligne
  - Subdivision de la source en sous blocs.
  - Analyse statistique de chaque bloc.
  - Choix du quantificateur en fonction de cette analyse.
  - Transmission du résultat de l'analyse statistique au décodeur. Ainsi le décodeur peut alors savoir c'est quoi le quantificateur utilisé pour effectuer la reconstruction.

Quantification Adaptative (1)

- Exemple: compression d'images
  - La source est supposé uniforme.
  - Subdivision de l'image en bloc de M x M.
  - Répéter pour chaque bloc
    - Détermination des valeurs maximale et minimale du bloc.
    - Fixer la plage de quantificateur à ces valeurs.
    - Quantifier.
  - Fin
  - Les valeurs minimale et maximale de chaque bloc doivent être envoyé et comptabilisées dans le débit.
  - À la réception de ces valeurs, le décodeur peut déduire le quantificateur utilisé et effectuer la reconstruction.

Quantification Adaptative (2)

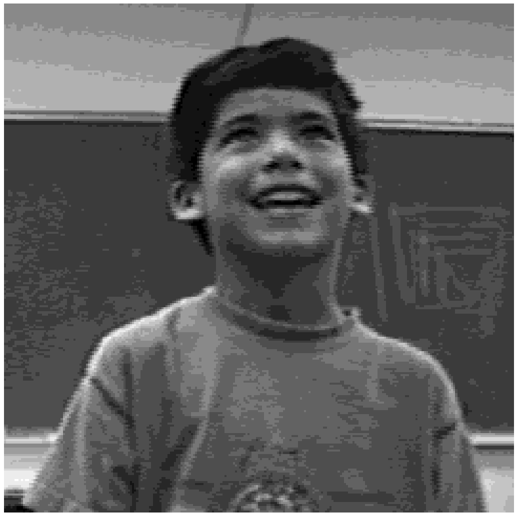
- Exemple: compression d'images [suite]
  - Soit M=8 → pour chaque bloc 8x8, les valeurs minimales et maximales sont envoyées.
  - Pour chaque blocs de 64 pixels, on envoie les deux pixels (2 x 8 bits) bornes au décodeur.
  - Ainsi on dépense 16 bits/64 pixels= 0.25 bits/pixel additionnel.
  - Considérons un quantificateur uniforme à 8 intervalles
  - Le débit du quantificateur R=3+0.25=3.25 bits/pixel.

Quantification Adaptative (3)

- Exemple: compression d’images [suite]

Quantification unifome: 3 bits/pixel

Quantification unifome: 4 bits/pixel



Quantification adaptative: 3.25 bits/pixel