Série 8

$P(0) = 0,8$

(a) $M = 1$: bloc de taille 1. $\Rightarrow$ on envoie 1 bit pour un bloc de 1 bit $\Rightarrow$ $\boxed{R_1 = 1}$

La reconstruction sera identique à la source $\boxed{D_1 = 0}$

$M = 2$

Source	Probabilité	code	Reconstruction
0 0	$(0,8)^2 = 0,64$	$n_0 = 2 \geq 1 \to 0$	0 0
0 1	$(0,8)(0,2) = 0,16$	$n_0 = 1 \geq 1 \to 0$	0 0
1 0	0,16	$n_0 = 1 \geq 1 \to 0$	0 0
1 1	$(0,2)(0,2) = 0,04$	$n_0 = 0 < 1 \to 1$	1 1

$\boxed{R_2 = 1/2}$

Source	Reconstruction	Distorsion pour les 2 bits	Distorsion par bit	Prob
0 0	0 0	0	0	0,64
0 1	0 0	1	1/2	0,16
1 0	0 0	1	1/2	0,16
1 1	1 1	0	0.	0,04

Distorsion moyenne par bit : $D_2 = 0,64 \times 0 + 0,16 \times 1/2 + 0,16 \times 1/2 + 0,04 \times 0$

$$\boxed{D_2 = 0,16}$$

b) $D_1 = 0 \Rightarrow R_{opt\,1} = H_b(0,8) - H(0) =$

$= -0,8 \log_2 0,8 - (1-0,8) \log_2 (1-0,8)$

$R_{opt\,1} = 0,72193$

$D_2 = 0,16 \Rightarrow R_{opt\,2} = H_b(0,8) - H(0,16)$

$= \cancel{\ldots}\ 0,08762$

c)

Source	Probabilité	code
00	0,64	0
01	0,16	0
10	0,16	0
11	0,04	1

$\Rightarrow$

Prob	code
0,96	0
0,04	1

<u>codeur entropique</u> : $R = H_{entropie2} = 0,96 \log_2 0,96 + 0,04 \log_2 0,04$

$\boxed{R_{entropie2} = 0,12} \Longleftarrow \boxed{R_{entropie2} = 0,24229/2}$ bits

$\boxed{R_{entropie1} = 0,8 \log_2 0,8 + 0,2 \log_2 0,2 = 0,72193}$

$\boxed{\text{Probleme 2}}$

$$I(X;Y) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i \mid y_j)}{P(x_i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)\, P(y_j)}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} p(x_i, y_j) \log \frac{P(y_j \mid x_i)}{P(y_j)}$$

$$= I(Y;X)$$

Formule : $P(X \mid Y) = \dfrac{P(X,Y)}{P(Y)}$

Problème 3

Enoncé :

$P(X=0) = P$ et $P(X=0 \mid Y=1) = P(X=1 \mid Y=0) = D$

on peut déduire :

* $P(X=0 \mid Y=0) = 1 - D = P(X=1 \mid Y=1)$

* $P(X=0, Y=0) = P(X=0 \mid Y=0) \cdot P(Y=0)$

$I(X,Y) = H(X) - H(X \mid Y)$

$H(X) = -p \log_2 P - (1-P) \log_2 (1-P) = H_b(P)$

$-H(X \mid Y) = +\sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} P(X=i, Y=j) \log_2 P(X=i \mid Y=j)$

$= P(X=0, Y=0) \log P(X=0 \mid Y=0) + P(X=0, Y=1) \log P(X=0 \mid Y=1)$
$+ P(X=1, Y=0) \log P(X=1 \mid Y=0) + P(X=1, Y=1) \log P(X=1 \mid Y=1)$

$= P(X=0 \mid Y=0) \cdot P(Y=0) \log P(X=0 \mid Y=0) + P(X=0 \mid Y=1) \cdot P(Y=1) \log P(X=0 \mid Y=1)$
$+ P(X=1 \mid Y=0) \cdot P(Y=0) \log P(X=1 \mid Y=0) + P(X=1 \mid Y=1) P(Y=1) \log P(X=1 \mid Y=1$

$= (1-D) \cdot P(Y=0) \log(1-D) + D\, P(Y=1) \log D + D\, P(Y=0) \log D$
$+ (1-D) P(Y=1) \log(1-D)$

$-H(X|Y)=$

$$(1-D)\lg(1-D)\,[\underbrace{P(Y=0)+P(Y=1)}_{=1}]$$

$$+\,D\lg D\,[\underbrace{P(Y=1)+P(Y=0)}_{=1}]$$

$$\Rightarrow\quad H(X|Y)=-(1-D)\lg(1-D)-D\lg D=H_b(D)$$

Problème 4

Soit un processus AR(1) :

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \varepsilon_n$$

* Calcul de la variance de x_n

$$Var(x_n) = Var(a_1 x_{n-1} + \varepsilon_n)$$
$$= a_1^2 Var(x_{n-1}) + Var(\varepsilon_n)$$

Comme $Var(x_n) = Var(x_{n-1})$ on a alors

$$Var(x_n)(1 - a_1^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$Var(x_n) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - a_1^2}$$

* D'un autre coté on a :

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \varepsilon_n = a_1 (a_1 x_{n-2} + \varepsilon_{n-1}) + \varepsilon_n$$
$$= a_1^2 x_{n-2} + a_1 \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$$
$$= a_1^k x_{n-k} + \sum_{l=0}^{k-1} a_1^l \varepsilon_{n-l}$$

$$R_{xx}(k) = E\left(x_n \, x_{n-k}\right)$$

$$= E\left[\left(a_1^k \, x_{n-k} + \sum_{l=0}^{k-1} a_1^l \, \varepsilon_{n-l}\right) x_{n-k}\right]$$

$$= a_1^k \, E\left(x_{n-k}^2\right) + \underbrace{E\left(\sum_{l=0}^{k-1} a_1^l \, \underline{\varepsilon_{n-l}} \cdot x_{\boxed{n-k}}\right)}_{=0}$$

$$\to n-k-1 \quad \neq$$

$$= a_1^k \, \mathrm{var}(x_n)$$

$$\boxed{R_{xx}(k) = a_1^k \, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - a_1^2}}$$