Solutionnaire : Série d'exercice N° 1

Problème 1 X variable aléatoire $x \in \{x_1, \dots, x_M\}$

Il faut montrer $0 \leq H(X) \leq \log_2 M$

(*) $$H(X) = \sum_{i=1}^{M} p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \geq \sum_{i=1}^{M} p(x_i) \log_2 \frac{1}{1} = 0$$

car $p(x_i) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}$

$$\boxed{H(X) \geq 0}$$

(*) [Théorème de Jensen] : Soit f une fonction convexe $\cap$

et $\lambda_i \quad i \in \{1, \dots, M\}$ tel que $\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1$

donc $$f\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i \alpha_i\right) \geq \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f(\alpha_i)$$

pour
- * $f(x) = \log_2(x)$: fonction convexe $\cap$
- * $\lambda_i = p(x_i)$ qui vérifie que $\sum_{i=1}^{M} p(x_i) = 1$
- * $\alpha_i = \frac{1}{p(x_i)}$

$$\Rightarrow \log_2\left(\sum_{i=1}^{M} p(x_i) \cdot \frac{1}{p(x_i)}\right) \geq \sum_{i=1}^{M} p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)}$$

$$\boxed{\log_2(M) \geq H(X)}$$

Problème 3

2 modèles de probabilité $\begin{cases} P = \{ p_0, p_1, \dots, p_m \} \rightsquigarrow H_P \\ Q = \{ q_0, q_1, \dots, q_m \} \rightsquigarrow H_Q \end{cases}$

Avec : $q_i = p_i \qquad i = 0, 1, \dots, j-2, j+1, \dots, m$

$$q_j = q_{j-1} = \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \implies H_Q \overset{?}{\gtrless} H_P$$

$$H_Q - H_P = -\sum_{i=1}^{m} q_i \log_2 q_i + \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i$$

$$= -q_j \log_2 q_j - q_{j-1} \log_2 q_{j-1} + p_j \log p_j + p_{j-1} \log_2 p_{j-1}$$

soit $c = p_j + p_{j-1}$; $q_j = \frac{c}{2}$; $q_{j-1} = \frac{c}{2}$

$$H_Q - H_P = -\frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{2} + p_j \log p_j + (c - p_j) \log_2 (c - p_j)$$

$$= -\frac{c}{2} \log_2 \frac{c}{2} + \left(c - \frac{c}{2}\right) \log_2 \left(c - \frac{c}{2}\right) + p_j \log p_j + (c - p_j) \log_2 (c - p_j)$$

Suite Problème 3

$$H_Q - H_P = -\frac{c}{2}\log_2\frac{c}{2} + \left(c-\frac{c}{2}\right)\log_2\left(c-\frac{c}{2}\right)$$
$$+ P_j \log_2 P_j + (c-P_j)\log_2(c-P_j)$$

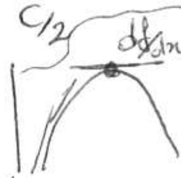
Soit la fonction $f_c(x)$ définie par : $c > 0$

$$f_c(x) = -x\log x - (c-x)\log(c-x)$$

$$\frac{d f_c(x)}{dx} = -x\,\frac{1}{x} - \log x + (c-x)\frac{1}{(c-x)} + \log(c-x)$$
$$\cancel{= -1 - \log x + 1 = -\log x}$$
$$= \log(c-x) - \log x$$

$$\frac{d f_c(x)}{dx} = 0 \Rightarrow c - x = x \Rightarrow \leadsto \boxed{x = c/2}$$

$$\left.\frac{d^2 f_c(x)}{dx^2}\right|_{x=c/2} = \left.-\frac{1}{c-x} - \frac{1}{x}\right|_{x=c/2} = -\frac{1}{c-c/2} - \frac{1}{c/2} = -4/c < 0$$



et la dérivée de la pente décroît.

$$\left.\frac{d f_c(x)}{dx}\right|_{c/2} = 0 \text{ et } \left.\frac{d^2 f_c(x)}{dx}\right|_{c/2} < 0 \Rightarrow f_c(x) \text{ présente un maximum en } c/2.$$

$\boxed{\text{Suite Problème 3}}$

$$H_Q - H_P = -\frac{c}{2}\log_2\frac{c}{2} + \left(c - \frac{c}{2}\right)\log_2\left(c - \frac{c}{2}\right)$$

$$+ P_j \log_2 P_j + (c - P_j)\log_2(c - P_j)$$

$$= f_c(c/2) - f_c(P_j)$$

Comme f_c présente un maximum en $c/2$

donc $f_c(c/2) \geq f_c(P_j)$

$$\Rightarrow H_Q - H_P \geq 0$$

$$\boxed{H_Q \geq H_P}$$

Problème 4

Test de décodabilité Unique

dangling suffix

(a) $\{\boxed{0},\ \boxed{0}1,\ 11,\ 111\}$

préfixe de

$\{0,\ 01,\ \boxed{11},\ \boxed{11}1,\ 1\}$

préfixe

mais le dangling suffix a été déjà rajouté à la liste.

$\{0,\ 01,\ 11,\ 111,\ \boxed{1}\}$

Condition d'arrêt: dangling suffix = mot code

$\Rightarrow$ Ce code n'est pas uniquement décodable.

$\{0, 01, 11, 111\}$

n'est pas uniquement décodable

Question : Peut on créer un code uniquement décodable à partir de ce code en maintenant la même longueur de chaque mot code.

Il faut vérifier : $\sum_{i=1}^{K} 2^{-l_i} \leq 1$

$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \geq 1$

$\Rightarrow$ non : on peut pas arranger ce code.

(+) Soit le message suivant 0 1 1 1

$\left.\begin{array}{l} 0, 111 \rightarrow 0, 111 \\ 01, 11 \rightarrow 01, 11 \end{array}\right\}$ non uniquement décodable.

(5) $\{ \boxed{10} , 0\underline{1} , 110 , 111 \}$

dangling

préfixe

$\{ 0, 01, \boxed{1}10, 111, \underline{\boxed{1}} \}$

préfixe

dangling

$\{ 0, 01, 110, \boxed{1}\underline{11}, \boxed{1}, 10 \}$

préfixe

dangling

$\{ 0, 01, 110, 111, \boxed{1}, \boxed{1}0, 11 \}$

préfixe

~~se trouve déjà~~ ~~se trouve déjà~~

dangling = mot code

⇒ non unique+ décodable

$\underbrace{0\,01}\,\underbrace{110} \longrightarrow 01,\ 110$

$\underbrace{0}\,\underbrace{111}\,\underbrace{0} \longrightarrow 0,\ 111,\ 0.$

$\{0, 01, 110, 111\}$

$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 1 \leq 1$

$\Rightarrow$ on peut rectifier ce code pour générer un code uniquement décodable

$\{\underline{0}, \underline{0}\boxed{1}, \underline{0}\,11, \underline{1}\,1\,\underline{1}\}$

$\{0, \underline{0\,1}, \underline{0\,1}\boxed{1}, \boxed{1}\,\underline{1}\,\boxed{1}, \boxed{1}, \underline{1\,1}\}$

dangling qui existe déjà

Il n'y a plus de dangling suffixe.

(c) Code préfixe $\Rightarrow$ Unique décodable

$\Rightarrow$ instantané.

Autre exemple pour l'étude de la décodabilité Unique et l'instantanéité

$\{0, 01, 011, 111\}$: uniquement décodable

Mais considérons que l'encodeur souhaite envoyer

0 ; 1 1 1

Le Décodeur reçoit séquentiellement :

0 ⟶ ne peut pas trancher que c'est 0 il doit vérifier si ce n'est pas "01" ou "011"

1 ⟶ ne peut pas trancher :

1 ⟶ pas encore

1 ⟶ ici on peut dire qu'on reçoit

0 ; 1 1 1

⟹ décodage avec délai de "0"

⟹ non instantané.

(1)

Solutionnaire de la série d'exercice N 2

Problème 1

$P(a_1) = 0,15$

$P(a_2) = 0,04$

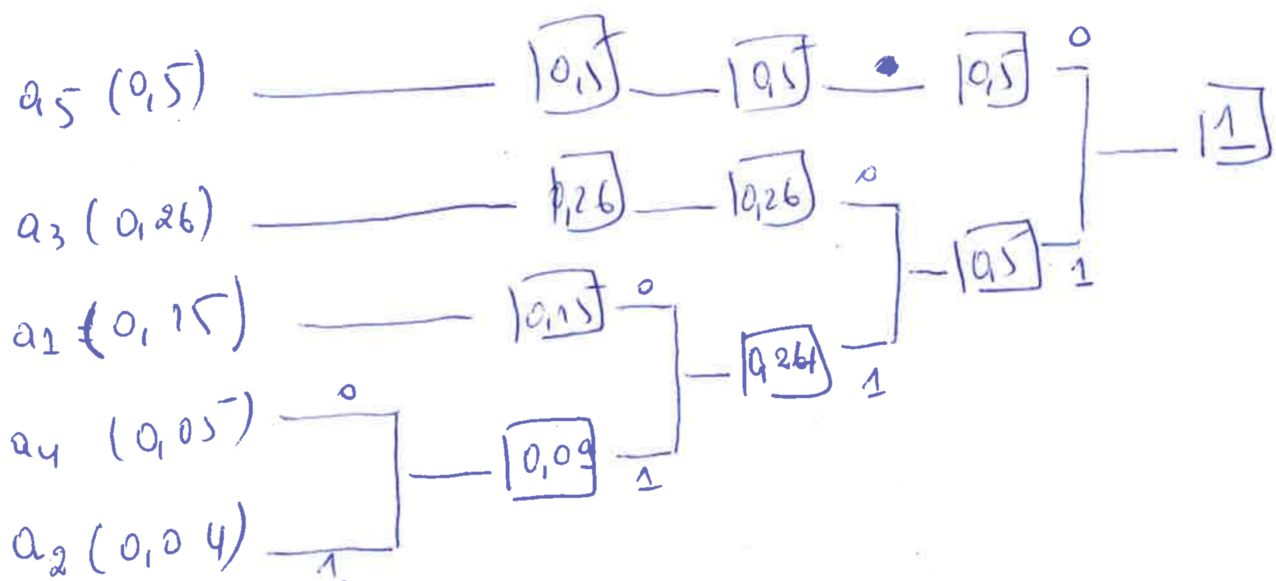
$P(a_3) = 0,26$

$P(a_4) = 0,05$

$P(a_5) = 0,5$

(a) Entropie en bits $H = -\sum p(a_i) \log_2 p(a_i) = 1,817$ bits

(b) ~~Calcul de~~ Construction d'un code de Huffman.



a_1 : 110

a_2 : 1111

a_3 : 10

a_4 : 1110

a_5 : 0

c) Calcul de la longueur moyenne

$$\bar{l} = (0,15) \cdot 3 + (0,04) \cdot 4 + 0,26 \cdot (2) + (0,05) \cdot 4 + 0,5$$

$$\boxed{\bar{l} = 1,83 \text{ bits / symbol}}$$

Calcul de la redondance :

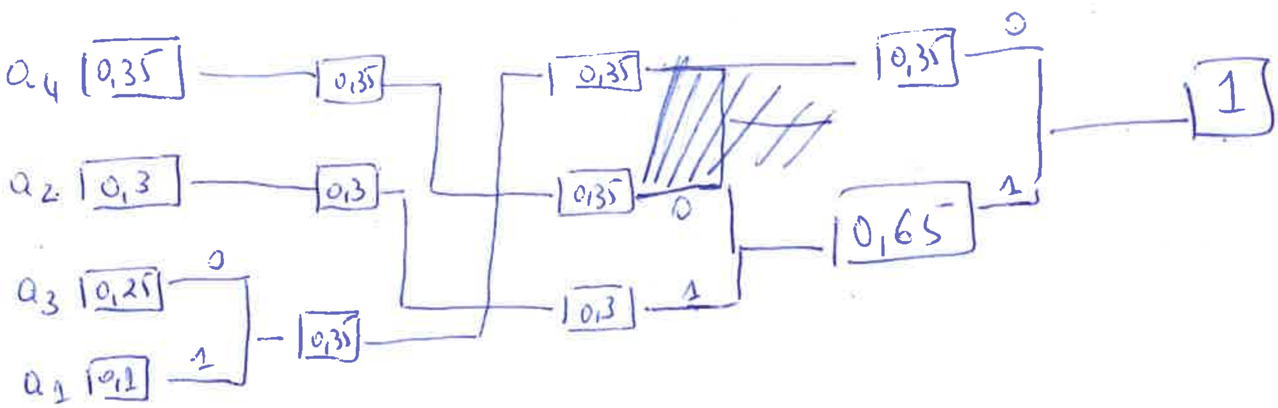
$$\frac{(\bar{l} - H)}{H} \times 100 = \frac{0,013}{1,817} \times 100 = 7,15\,\%$$

(2)

Problème 2

Soit la source tel que : $P(a_1) = 0,1$
$P(a_2) = 0,3$
$p(a_3) = 0,25$
$p(a_4) = 0,35$

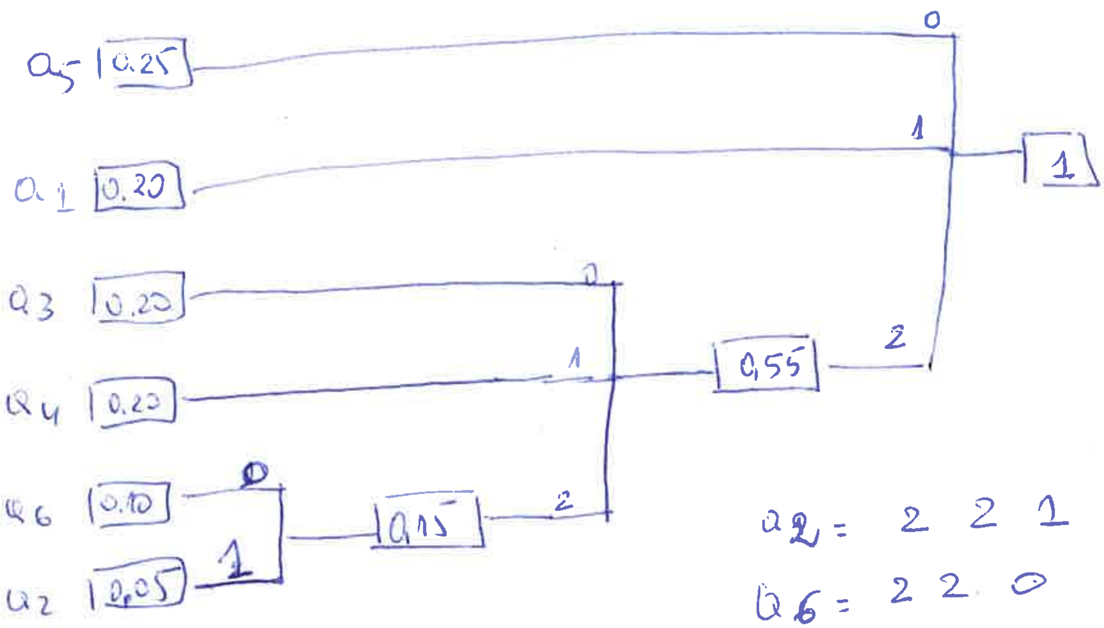
Déterminer le Code de Huffman à variance minimale.



a_1 :	0 1
a_2	1 1
a_3 :	0 0
a_4	1 0

Problème 3 — Code ternaire de Huffman

Reprise de l'exemple 3.3.1



$a_2 = 2\ 2\ 1$ $\qquad a_3 = 2\ 0$

$a_6 = 2\ 2\ 0$ $\qquad a_1 = 1$

$a_4 = 2\ 1$ $\qquad a_5 = 0$

- Avant de commencer la construction du code il faut déterminer
- le nombre de lettre à combiner en premier lieu $\boxed{m'}$.

On a un Alphabet formé de $\boxed{M = 6}$ lettres

et on veut construire un code ternaire = m-aire $\Rightarrow \boxed{m = 3}$

Détermination de m' :

$$m'' = (m-1) + M \bmod (m-1) \quad \begin{cases} \text{Si } m'' > m \Rightarrow m' = m'' - (m-1) \\ \text{Si } m'' \leq m \Rightarrow m' = m'' \end{cases}$$

~~Si m''~~

Application dans notre cas :

$m'' = 2 + 6 \bmod 2 = 2.$

$m'' < m \Rightarrow m' = m'' = 2$

$$\boxed{m' = 2}$$

Série d'exercice 3

Problème 3

État Initial

Lettre	Probabilité
a_1	0,7 ← max
a_2	0,2
a_3	0,1

Itération 2 :

Lettre	Prob
a_2	0,2
a_3	0,1
$a_1 a_1$	0,49 ← max
$a_1 a_2$	0,14
$a_1 a_3$	0,07

Itération 3 :

Lettre	Prob	
a_2	0,2	000
a_3	0,1	001
$a_1 a_2$	0,14	010
$a_1 a_3$	0,07	011
$a_1 a_1 a_1$	0,343	100
$a_1 a_2 a_1$	0,098	101
$a_1 a_1 a_3$	0,049	110

Remarque sur les codes arithmétiques

Exemple 1

Supposer qu'à la fin ~~de construction~~ l'encodage on a :

Séquence à envoyer : 1 1 0 0 1

$u = 1\ 0\ 0\ 1\ 1$

$\ell = \boxed{0}\ 0\ 0\ 1\ 1$ et scale3 = $\boxed{2}$

choix tag $t = \ell$

Séquence à envoyer :

$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ \boxed{0}\ \boxed{1\ 1}\ \boxed{0\ 0\ 1\ 1}$

Exemple 2

Séquence à envoyer 1 1 0 0 1

$u = 1\ 1\ 0\ 0\ 0$

$\ell = \boxed{1}\ 0\ 0\ 0\ 0$ scale3 = $\boxed{2}$

Séquence à envoyer

$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ \boxed{1}\ \boxed{0\ 0}\ \boxed{0\ 0\ 0\ 0}$

Série d'exercice 5

1

Problème 3

W = 30

bus d'inspection 15 => S = 15

b a r r a y a r _ b a r _ b y _ b a r r a y a r _ b a y

< 0, 0, c(b)> , < 0, 0, c(a)> , < 0, 0, c(r)> , < 1, 1, c(a)>

< 0, 0, c(y)> , < 5, 2, c(_)> , < 9, 3, c(_)> , < 4, 1, c(y)>

< 7, 4, c(r)> , < 3, 1, c(y)> , < 12, 4, c(a)>

Problème 1

a_bar_array_by_barrayar_bay

Indice	entrée	envoi
1	a	
2	b	
3	r	
4	y	
5	_	
6	a_	1
7	_b	5
8	ba	2
9	ar	1
10	r_	3
11	_a	5
12	arr	9
13	ra	3
14	ay	1
15	y_	4
16	_by	7
17	y_b	15
18	bar	2
19	ray	13
20	ya	4
21	ar_	9
22	_ba	7
23	ay	14