Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
MAT-22257

Danny Dubé
Hiver 2009
Version : 24 avril

Travail pratique #3 — Solutionnaire
Ensembles infinis et résolution de récurrences

Questions et réponses

1. Pour chacun des ensembles suivants, indiquez s'il s'agit d'un ensemble fini, infini dénombrable ou non-dénombrable et justifiez votre réponse.

   (a) $\{f : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N} \mid \mathsf{Dom}(f) \text{ est fini}\}$.
   (Note : On parle ici de fonctions partielles.)
   Réponse
   Soit S cet ensemble. S est infini dénombrable.
   Preuve
   On construit une application bijective $f : \mathbb{N} \to S$. Grâce à cette fonction et grâce aux théorèmes **(I.2.2)** et **(I.2.6)**, on pourra conclure que S a la même cardinalité que $\mathbb{N}$, c'est-à-dire infini dénombrable.

   On définit la suite d'ensembles $\langle S_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$ suivante, où :

   $$S_i = \{f : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N} \ \mid \ \#(\mathsf{Dom}(f)) \leq i \ \wedge \ (\forall x, y \mid \langle x, y\rangle \in f : x \leq i \wedge y \leq i)\}$$

   On remarque quelques faits à propos de cette suite.
   – Pour n'importe quel $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble S_i est fini car il n'existe qu'un nombre fini de fonctions composées d'au plus i couples et où les éléments de chaque couple sont dans $\{0, 1, \ldots, i\}$.
   – Pour n'importe quel $i \in \mathbb{N}$, on a que $S_i \subseteq S_{i+1}$.
   – Enfin, $\lim_{i\to\infty} S_i = S$.

   (Il faut noter qu'il ne serait pas suffisant de définir $S_i = \{f : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N} \mid \#(\mathsf{Dom}(f)) \leq i\}$ car, ainsi, les S_i ne seraient pas finis. Cela causerait des problèmes dans la définition de f qui suit.)

On définit f par extension de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \{\} & & & & \\
S_0 : & \uparrow & & & & \\
 & f(0) & & & & \\
 & & & & & \\
 & \{\langle 0,0\rangle\} & \{\langle 0,1\rangle\} & \{\langle 1,0\rangle\} & \{\langle 1,1\rangle\} & \\
S_1 - S_0 : & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & \\
 & & & & & \\
 & \{\langle 0,2\rangle\} & & \{\langle 2,2\rangle\} & \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\} & \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\} & \\
S_2 - S_1 : & \uparrow & \ldots & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \ldots \\
 & f(5) & & f(9) & f(10) & f(11) & \\
 & & & & & \\
 & & \ldots & & &
\end{array}
$$

C.Q.F.D.

(b) $\{f : M \to \mathbb{B}\}$ où M est l'ensemble des mots finis (qui ne sont pas nécessairement des mots valides en français) qu'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet latin.

(Note : On peut voir une telle fonction f comme un vérificateur d'orthographe. Étant donné un mot $w \in M$, $f(w)$ indique si le mot est bien orthographié ou pas. On peut voir chaque f comme étant le vérificateur d'orthographe dans une langue hypothétique.)

Réponse

Soit S cet ensemble. S est non dénombrable.

Preuve

Par la définition **(I.3.14)**, $S = \mathbb{B}^M$. Or, $|\mathbb{B}| \geq 2$ et M est infini (voir prochain paragraphe). Donc, par le théorème **(I.3.17)**, on a que S est non dénombrable.

L'application injective $f : \mathbb{N} \to M$ suivante démontre que $|\mathbb{N}| \leq |M|$, grâce à l'axiome **(I.3.2)** :

$$
\begin{array}{cccccc}
\epsilon & \text{a} & \text{aa} & \text{aaa} & \text{aaaa} & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \ldots \\
f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) &
\end{array}
$$

C.Q.F.D.

(c) $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie récursivement par

$$
\begin{cases}
a_0 = 10 \\
a_1 = 5 \\
a_2 = 7 \\
a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} - 22, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1,2\}.
\end{cases}
$$

(Indice : Calculez à la main les quelques premiers termes de la suite.)

Réponse

Soit S cet ensemble. S est fini.

Preuve

Premièrement, soit $P(n) \equiv a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 22$, pour $n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$.
On montre que $P(n)$, $\forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$, par induction.

Cas de base : on montre $P(2)$.
Comme $a_2 + a_1 + a_0 = 7 + 5 + 10 = 22$. $P(2)$ est vrai.

Hypothèse d'induction : soit $n > 2$; on suppose $P(n - 1)$.

Pas d'induction : on montre $P(n)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \\
= & \quad \langle \text{ Définition de } a_n \text{ par la récurrence } \rangle \\
 & (a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} - 22) + a_{n-1} + a_{n-2} \\
= & \quad \langle \ \rangle \\
 & 2(a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}) - 22 \\
= & \quad \langle \text{ Hypothèse d'induction } \rangle \\
 & 2 \cdot 22 - 22 \\
= & \quad \langle \ \rangle \\
 & 22
\end{array}
$$

Deuxièmement, soit $Q(n) \equiv a_n \in \{5, 7, 10\}$, pour $n : \mathbb{N}$.
On montre que $Q(n)$, $\forall n : \mathbb{N}$, par induction à trois cas de base.

Cas de base : on montre $Q(0)$. Comme $a_0 = 10 \in \{5, 7, 10\}$, $Q(0)$ est vrai.
Cas de base : on montre $Q(1)$. Comme $a_1 = 5 \in \{5, 7, 10\}$, $Q(1)$ est vrai.
Cas de base : on montre $Q(2)$. Comme $a_2 = 7 \in \{5, 7, 10\}$, $Q(2)$ est vrai.

Hypothèse d'induction : soit $n \geq 3$; on suppose $Q(n - 3)$, $Q(n - 2)$ et $Q(n - 1)$.

Pas d'induction : on montre $Q(n)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & a_n \\
= & \quad \langle \text{ Par la récurrence } \rangle \\
 & a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} - 22 \\
= & \quad \langle \ \rangle \\
 & (a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}) + a_{n-3} - 22 \\
= & \quad \langle \text{ Grâce à } P(n-1) \text{ } \rangle \\
 & 22 + a_{n-3} - 22 \\
= & \quad \langle \ \rangle \\
 & a_{n-3} \\
\in & \quad \langle \text{ Grâce à } Q(n-3) \text{ } \rangle \\
 & \{5, 7, 10\}
\end{array}
$$

Ce dernier résultat nous permet de conclure que $S = \{5, 7, 10\}$. S est donc fini.

C.Q.F.D.

2. Soit la suite $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} b_0 &= -1 \\ b_1 &= 0 \\ b_n &= b_{n-1} + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot b_{n-2}) + 1, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}. \end{cases}$$

Démontrez que $b_n = \lfloor \frac{4n}{3} \rfloor - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Je vous recommande de faire une preuve par induction avec cinq (oui, 5) cas de base.
Utilisez cette version du principe d'induction :

$$\begin{array}{l} \Big(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge \\ \big(\forall n : \mathbb{N} \mid n \geq 5 : P(n-5) \wedge P(n-4) \wedge P(n-3) \wedge P(n-2) \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n)\big)\Big) \\ \quad \Rightarrow \quad (\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n)) \end{array}$$

(Indice : observez que $b_n = b_{n-3} + 4$ pour $n \geq 3$.)
(Petit rappel de trigonométrie :

$$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \cos(0) = 1, \quad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).)$$

Preuve
Soit $P(n) \equiv b_n = \lfloor \frac{4n}{3} \rfloor - 1$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Cas de base $P(0)$. $b_0 = -1 = \lfloor \frac{4\cdot 0}{3} \rfloor - 1$.
Cas de base $P(1)$. $b_1 = 0 = \lfloor \frac{4\cdot 1}{3} \rfloor - 1$.
Cas de base $P(2)$. $b_2 = b_1 + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot b_0) + 1 = 0 + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot (-1)) + 1 = 0 + 1 = 1 = \lfloor \frac{4\cdot 2}{3} \rfloor - 1$.
Cas de base $P(3)$. $b_3 = b_2 + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot b_1) + 1 = 1 + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot 0) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 = \lfloor \frac{4\cdot 3}{3} \rfloor - 1$.
Cas de base $P(4)$. $b_4 = b_3 + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot b_2) + 1 = 3 + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot 1) + 1 = 3 + 0 + 1 = 4 = \lfloor \frac{4\cdot 4}{3} \rfloor - 1$.

Soit $n \geq 5$. On suppose $P(n-5)$, $P(n-4)$, $P(n-3)$, $P(n-2)$ et $P(n-1)$.

On doit montrer $P(n)$.

$$\begin{array}{ll} & b_n \\ = & \quad \langle \text{ Par la récurrence } \rangle \\ & b_{n-1} + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot b_{n-2}\right) + 1 \\ = & \quad \langle \text{ Grâce à } P(n-1) \text{ et } P(n-2) \ \rangle \\ & \left(\lfloor \frac{4(n-1)}{3} \rfloor - 1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \left(\lfloor \frac{4(n-2)}{3} \rfloor - 1\right)\right) + 1 \\ = & \quad \langle \text{ Propriétés de l'arithmétique } \rangle \\ & \left(\lfloor \frac{4(n-4)}{3} \rfloor + 4 - 1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \left(\lfloor \frac{4(n-5)}{3} \rfloor + 4 - 1\right)\right) + 1 \\ = & \quad \langle \text{ Propriétés de l'arithmétique } \rangle \end{array}$$

$$\left(\lfloor\tfrac{4(n-4)}{3}\rfloor-1\right)+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot\left(\lfloor\tfrac{4(n-5)}{3}\rfloor-1\right)+\tfrac{\pi}{2}\cdot 4\right)+1+4$$

$=$ $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

$$\left(\lfloor\tfrac{4(n-4)}{3}\rfloor-1\right)+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot\left(\lfloor\tfrac{4(n-5)}{3}\rfloor-1\right)+2\pi\right)+1+4$$

$=$ $\langle$ Propriétés du cosinus $\rangle$

$$\left(\lfloor\tfrac{4(n-4)}{3}\rfloor-1\right)+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot\left(\lfloor\tfrac{4(n-5)}{3}\rfloor-1\right)\right)+1+4$$

$=$ $\langle$ Grâce à $P(n-4)$ et $P(n-5)$ $\rangle$

$$b_{n-4}+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot b_{n-5}\right)+1+4$$

$=$ $\langle$ Par la récurrence $\rangle$

$$b_{n-3}+4$$

$=$ $\langle$ Grâce à $P(n-3)$ $\rangle$

$$\lfloor\tfrac{4(n-3)}{3}\rfloor-1+4$$

$=$ $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

$$\lfloor\tfrac{4n}{3}\rfloor-1$$

C.Q.F.D.

3. Trouvez le terme général pour chacune des suites suivantes en utilisant la méthode des séries génératrices.

   (a) $\begin{cases} c_0 &= 1 \\ c_n &= 3c_{n-1}+6n-3, \quad \forall n:\mathbb{N}-\{0\}. \end{cases}$

   Réponse

   Soit $G(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots$

   On a que $c_n-3c_{n-1}-6n+3=0$, pour $n:\mathbb{N}-\{0\}$, et donc

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & - & 3c_0 & - & 6\cdot 1 & + & 3 & = & 0 \\ c_2 & - & 3c_1 & - & 6\cdot 2 & + & 3 & = & 0 \\ c_3 & - & 3c_2 & - & 6\cdot 3 & + & 3 & = & 0 \end{array}$$

   $\ldots$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcccrcc} G(x) & = & c_0 & + & c_1x & + & c_2x^2 & + & c_3x^3 & + & \ldots & + & c_nx^n & + & \ldots \\ -3xG(x) & = & & - & 3c_0x & - & 3c_1x^2 & - & 3c_2x^3 & - & \ldots & - & 3c_{n-1}x^n & - & \ldots \\ \frac{-6x}{(1-x)^2} & = & -6\cdot 0 & - & 6\cdot 1x & - & 6\cdot 2x^2 & - & 6\cdot 3x^3 & - & \ldots & - & 6\cdot nx^n & - & \ldots \\ \frac{3}{1-x} & = & 3 & + & 3x & + & 3x^2 & + & 3x^3 & + & \ldots & + & 3x^n & + & \ldots \\ \hline F(x) & = & c_0+3 & + & 0x & + & 0x^2 & + & 0x^3 & + & \ldots & + & 0x^n & + & \ldots \end{array}$$

   où $F(x)=G(x)-3xG(x)-\frac{6x}{(1-x)^2}+\frac{3}{1-x}$.

   Donc, $G(x)-3xG(x)-\frac{6x}{(1-x)^2}+\frac{3}{1-x}=4$.

   Donc, $G(x)=\left(\frac{6x}{(1-x)^2}-\frac{3}{1-x}+4\right)/(1-3x)$.

   Donc, $G(x)=\frac{4x^2+x+1}{(1-3x)(1-x)^2}$.

   Selon le théorème **(R.3.4)**, $G(x)=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1-3x}$.

   Donc, $G(x)=\frac{(3A+C)x^2+(-4A-3B-2C)x+(A+B+C)}{(1-3x)(1-x)^2}$.

En solutionnant le système d'équations $\begin{cases} 3A + C &= 4 \\ -4A - 3B - 2C &= 1 \\ A + B + C &= 1, \end{cases}$

on obtient que $A = 0$, $B = -3$ et $C = 4$.

$$\begin{aligned} & G(x) \\ = & \tfrac{-3}{(1-x)^2} + \tfrac{4}{1-3x} \\ = & -3\cdot 1 - 3\cdot 2x - 3\cdot 3x^2 - 3\cdot 4x^3 - \ldots - 3(n+1)x^n - \ldots \\ & +4 + 4\cdot 3x + 4\cdot 3^2x^2 + 4\cdot 3^3x^3 + \ldots + 4\cdot 3^n x^n + \ldots \\ = & 1 + 6x + 27x^2 + 96x^3 + \ldots + (4\cdot 3^n - 3(n+1))x^n + \ldots \end{aligned}$$

Donc, $c_n = 4\cdot 3^n - 3(n+1)$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

(b) $\begin{cases} d_0 &= 3 \\ d_1 &= 4 \\ d_n &= 2d_{n-1} - d_{n-2} + 1, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\}. \end{cases}$

Réponse

Soit $G(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + \ldots + d_nx^n + \ldots$

On a que $d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2} - 1 = 0$, pour $n : \mathbb{N} - \{0,1\}$, et donc

$$\begin{array}{ccccccccc} d_2 & - & 2d_1 & + & d_0 & - & 1 & = & 0 \\ d_3 & - & 2d_2 & + & d_1 & - & 1 & = & 0 \\ d_4 & - & 2d_3 & + & d_2 & - & 1 & = & 0 \end{array}$$

$\ldots$

$$\begin{array}{rclclclclclclcl} G(x) & = & d_0 & + & d_1x & + & d_2x^2 & + & d_3x^3 & + & \ldots & + & d_nx^n & + & \ldots \\ -2xG(x) & = & & - & 2d_0x & - & 2d_1x^2 & - & 2d_2x^3 & - & \ldots & - & 2d_{n-1}x^n & - & \ldots \\ x^2G(x) & = & & & & & d_0x^2 & + & d_1x^3 & + & \ldots & + & d_{n-2}x^n & + & \ldots \\ \frac{-1}{1-x} & = & -1 & - & x & - & x^2 & - & x^3 & - & \ldots & - & x^n & - & \ldots \\ \hline F(x) & = & H(x) & & & + & 0x^2 & + & 0x^3 & + & \ldots & + & 0x^n & + & \ldots \end{array}$$

où $F(x) = G(x) - 2xG(x) + x^2G(x) - \frac{1}{1-x}$
et $H(x) = d_0 + d_1x - 2d_0x - 1 - x$.

Donc, $G(x) = \frac{3x^2-5x+3}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3}$, selon **(R.3.4)**.
Après résolution, on obtient que $A = 3$, $B = -1$ et $C = 1$.

$$\begin{aligned} & G(x) \\ = & \tfrac{3}{1-x} - \tfrac{1}{(1-x)^2} + \tfrac{1}{(1-x)^3} \\ = & 3 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + \ldots + 3x^n + \ldots \\ & -1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 - \ldots - (n+1)x^n - \ldots \\ & +\tfrac{2\cdot 1}{2} + \tfrac{3\cdot 2}{2}x + \tfrac{4\cdot 3}{2}x^2 + \tfrac{5\cdot 4}{2}x^3 + \ldots + \tfrac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \ldots \\ = & 3 + 4x + 6x^2 + 11x^3 + \ldots + \left(3 - (n+1) + \tfrac{(n+2)(n+1)}{2}\right)x^n + \ldots \end{aligned}$$

Donc, $d_n = 2 - n + \frac{(n+2)(n+1)}{2}$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

(c) $\begin{cases} e_0 &= 1 \\ e_1 &= 3 \\ e_n &= e_{n-1} + 2e_{n-2} - 4, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\}. \end{cases}$

Réponse

Soit $G(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + e_3 x^3 + \ldots + e_n x^n + \ldots$

On a que $e_n - e_{n-1} - 2e_{n-2} + 4 = 0$, pour $n : \mathbb{N} - \{0,1\}$, et donc

$$\begin{array}{ccccccccc} e_2 & - & e_1 & - & 2e_0 & + & 4 & = & 0 \\ e_3 & - & e_2 & - & 2e_1 & + & 4 & = & 0 \\ e_4 & - & e_3 & - & 2e_2 & + & 4 & = & 0 \end{array}$$

$\ldots$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcccrcc} G(x) & = & e_0 & + & e_1 x & + & e_2 x^2 & + & e_3 x^3 & + & \ldots & + & e_n x^n & + & \ldots \\ -xG(x) & = & & - & e_0 x & - & e_1 x^2 & - & e_2 x^3 & - & \ldots & - & e_{n-1} x^n & - & \ldots \\ -2x^2 G(x) & = & & & & - & 2e_0 x^2 & - & 2e_1 x^3 & - & \ldots & - & 2e_{n-2} x^n & - & \ldots \\ \frac{4}{1-x} & = & 4 & + & 4x & + & 4x^2 & + & 4x^3 & + & \ldots & + & 4x^n & + & \ldots \\ \hline F(x) & = & H(x) & & & + & 0x^2 & + & 0x^3 & + & \ldots & + & 0x^n & + & \ldots \end{array}$$

où $F(x) = G(x) - xG(x) - 2x^2 G(x) + \frac{4}{1-x}$
et $H(x) = e_0 + e_1 x - e_0 x + 4 + 4x$.

Donc, $G(x) = \frac{-6x^2+x+1}{(1-x)(1-2x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{1+x}$, selon **(R.3.4)**.
Après résolution, on obtient que $A = 2$, $B = 0$ et $C = -1$.

$$\begin{array}{rl} & G(x) \\ = & \frac{2}{1-x} - \frac{1}{1+x} \\ = & 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots + 2x^n + \ldots \\ & -1 - (-1)x - (-1)^2 x^2 - (-1)^3 x^3 - \ldots - (-1)^n x^n - \ldots \\ = & 1 + 3x + x^2 + 3x^3 + \ldots + (2 - (-1)^n)\, x^n + \ldots \end{array}$$

Donc, $e_n = 2 - (-1)^n$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

4. Trouvez le terme général pour chacune des suites suivantes.

(a) $\begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 2 \\ f_n &= 2f_{n-1} + 3f_{n-2}, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\}. \end{cases}$

Réponse

Il s'agit d'une récurrence linéaire et homogène d'ordre 2.

Soit $p(x) = x^2 - 2x - 3$ son polynôme caractéristique.
On veut $p(x) = 0$, donc $(x-3)(x+1) = 0$.
Les deux zéros sont $\rho_1 = 3$ et $\rho_2 = -1$.
Ainsi, selon **(R.4.5)**, on a que $f_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$, $\forall n : \mathbb{N}$.
En sachant que $f_0 = 0$ et $f_1 = 2$, on peut déterminer que $A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{-1}{2}$.

Donc, $f_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

(b) $\begin{cases} g_0 &= 13 \\ g_n &= g_{n-1} + n + 13, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$

Réponse

Il s'agit d'une suite des sommes des premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 13 et de différence 1.

Ainsi, selon **(R.2.8)**, $g_n = \frac{(13+(n+13))(n+1)}{2} = \frac{(n+26)(n+1)}{2}$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

(c) $\begin{cases} h_0 &= 3 \\ h_1 &= 7 \\ h_n &= 5h_{n-1} - 6h_{n-2}, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}. \end{cases}$

Réponse

Il s'agit d'une récurrence linéaire et homogène d'ordre 2.

Soit $p(x) = x^2 - 5x + 6$ son polynôme caractéristique.
On veut $p(x) = 0$, donc $(x - 3)(x - 2) = 0$.
Les deux zéros sont $\rho_1 = 3$ et $\rho_2 = 2$.
Ainsi, selon **(R.4.5)**, on a que $h_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$, $\forall n : \mathbb{N}$.
En sachant que $h_0 = 3$ et $h_1 = 7$, on peut déterminer que $A = 1$ et $B = 2$.

Donc, $h_n = 3^n + 2 \cdot 2^n$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

(d) $\begin{cases} i_0 &= 7 \\ i_n &= 3i_{n-1}, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$

Réponse

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 7 et de raison 3.

Ainsi, selon **(R.2.5)**, $i_n = 7 \cdot 3^n$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

(e) $\begin{cases} h_0 &= 2 \\ h_n &= h_{n-1} + 2 \cdot 3^n, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$

Réponse

Il s'agit d'une suite des sommes des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

Ainsi, selon **(R.2.10)**, $h_n = \frac{2(1-3^{n+1})}{1-3} = 3^{n+1} - 1$, $\forall n : \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.