Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
MAT-22257

Danny Dubé
Hiver 2009
Version : 7 avril

Travail pratique #3
Ensembles infinis et résolution de récurrences

Questions

À moins d'indications contraires, vous devez **toujours justifier** complètement votre réponse ; même pour un contre-exemple. Vous pouvez donner des définitions en extension d'une application (injective, surjective ou bijective) dont le domaine est $\mathbb{N}$ et, dans ce cas, vous n'avez pas à démontrer qu'il s'agit d'une application (injective, surjective ou bijective, respectivement).

1. Pour chacun des ensembles suivants, indiquez s'il s'agit d'un ensemble fini, infini dénombrable ou non-dénombrable et justifiez votre réponse.

   (a) $\{f : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N} \mid \mathsf{Dom}(f) \text{ est fini}\}$.
   (Note : On parle ici de fonctions partielles.)

   (b) $\{f : M \to \mathbb{B}\}$ où M est l'ensemble des mots finis (qui ne sont pas nécessairement des mots valides en français) qu'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet latin.
   (Note : On peut voir une telle fonction f comme un vérificateur d'orthographe. Étant donné un mot $w \in M$, $f(w)$ indique si le mot est bien orthographié ou pas. On peut voir chaque f comme étant le vérificateur d'orthographe dans une langue hypothétique.)

   (c) $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie récursivement par

$$\begin{cases} a_0 & = & 10 \\ a_1 & = & 5 \\ a_2 & = & 7 \\ a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} - 22, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

   (Indice : Calculez à la main les quelques premiers termes de la suite.)

2. Soit la suite $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} b_0 & = & -1 \\ b_1 & = & 0 \\ b_n & = & b_{n-1} + \cos(\frac{\pi}{2} \cdot b_{n-2}) + 1, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}. \end{cases}$$

   Démontrez que $b_n = \lfloor \frac{4n}{3} \rfloor - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Je vous recommande de faire une preuve par induction avec cinq (oui, 5) cas de base. Utilisez cette version du principe d'induction :

$$\begin{array}{l}\Big(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge \\ \big(\forall n : \mathbb{N} \mid n \geq 5 : P(n-5) \wedge P(n-4) \wedge P(n-3) \wedge P(n-2) \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n)\big)\Big) \\ \quad \Rightarrow \quad (\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n))\end{array}$$

(Indice : observez que $b_n = b_{n-3} + 4$ pour $n \geq 3$.)
(Petit rappel de trigonométrie :

$$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \cos(0) = 1, \quad \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).)$$

3. Trouvez le terme général pour chacune des suites suivantes en utilisant la méthode des séries génératrices.

   (a) $\left\{\begin{array}{lll} c_0 & = & 1 \\ c_n & = & 3c_{n-1} + 6n - 3, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0\}. \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{lll} d_0 & = & 3 \\ d_1 & = & 4 \\ d_n & = & 2d_{n-1} - d_{n-2} + 1, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}. \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{lll} e_0 & = & 1 \\ e_1 & = & 3 \\ e_n & = & e_{n-1} + 2e_{n-2} - 4, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}. \end{array}\right.$

4. Trouvez le terme général pour chacune des suites suivantes.

   (a) $\left\{\begin{array}{lll} f_0 & = & 0 \\ f_1 & = & 2 \\ f_n & = & 2f_{n-1} + 3f_{n-2}, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}. \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{lll} g_0 & = & 13 \\ g_n & = & g_{n-1} + n + 13, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0\}. \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{lll} h_0 & = & 3 \\ h_1 & = & 7 \\ h_n & = & 5h_{n-1} - 6h_{n-2}, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}. \end{array}\right.$

   (d) $\left\{\begin{array}{lll} i_0 & = & 7 \\ i_n & = & 3i_{n-1}, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0\}. \end{array}\right.$

   (e) $\left\{\begin{array}{lll} h_0 & = & 2 \\ h_n & = & h_{n-1} + 2 \cdot 3^n, \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0\}. \end{array}\right.$

Remise des travaux

Vous devez remettre votre devoir sur papier et dans le **casier jaune** identifié à mon nom. Vous devez remettre le devoir au plus tard le **24 avril, 17h55**.