Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
MAT-22257

Danny Dubé
Hiver 2009
Version : 9 mars

Travail pratique #2 — Solutionnaire
Relations, ensembles infinis et preuves classiques

Questions et réponses

À moins d'indications contraires, lorsqu'une question vous demande de justifier votre réponse, il faut fournir une preuve classique complète ; même pour un contre-exemple.

1. Prouvez le théorème **(12.33) Monotonie de** $\circ$: $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta$, de manière classique.

   Preuve :
   Il faut démontrer que : $(\forall\ \rho, \sigma : A \times B,\ \theta : B \times C \mid: \rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta)$.
   Soient $\rho, \sigma : A \times B$ et $\theta : B \times C$ tels que $\rho \subseteq \sigma$.
   Il reste à démontrer que : $\rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta$.
   Ou, autrement dit : $(\forall\ a : A,\ c : C \mid \langle a, c\rangle \in \rho \circ \theta : \langle a, c\rangle \in \sigma \circ \theta)$.
   Soient $a : A$ et $c : C$ tels que $\langle a, c\rangle \in \rho \circ \theta$.
   Il reste à démontrer que : $\langle a, c\rangle \in \sigma \circ \theta$.
   Soit $b : B$ tel que $\langle a, b\rangle \in \rho$ et $\langle b, c\rangle \in \theta$. ⟨ Par définition de $\circ$ ⟩
   Alors, $\langle a, b\rangle \in \sigma$ et $\langle b, c\rangle \in \theta$. ⟨ Car $\rho \subseteq \sigma$ ⟩
   Alors, $\langle a, c\rangle \in \sigma \circ \theta$. ⟨ Par définition de $\circ$ ⟩
   C.Q.F.D.

2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application sur les naturels. Alors, montrez que $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une relation d'équivalence :

$$x \,\rho\, y \quad \equiv \quad (\exists i : \mathbb{N} \mid : f^i(x) = f^i(y)).$$

Réponse :

Il faut montrer que ρ est réflexif, symétrique et transitif.

Preuve que ρ est réflexif :

À démontrer : $(\forall\, x : \mathbb{N} \mid : x \,\rho\, x)$.

Soit $x : \mathbb{N}$.

Soit $i = 1$. $\langle$ 1 existe et $1 \in \mathbb{N}$ $\rangle$

On constate que : $f^i(x) = f^i(x)$. $\langle$ $f^i(x)$ est bien défini car f est une application $\rangle$

C.Q.F.D.

Preuve que ρ est symétrique :

À démontrer : $(\forall\, x, y : \mathbb{N} \mid : x \,\rho\, y \Leftrightarrow y \,\rho\, x)$.

Soient $x, y : \mathbb{N}$.

Sans perte de généralité, on montre que : $x \,\rho\, y \Rightarrow y \,\rho\, x$.

On suppose donc que $x \,\rho\, y$.

Soit $i : \mathbb{N}$ tel que $f^i(x) = f^i(y)$. $\langle$ i existe car $x \,\rho\, y$ $\rangle$

Donc $f^i(y) = f^i(x)$. $\langle$ Car $=$ est commutatif $\rangle$

Donc $y \,\rho\, x$.

C.Q.F.D.

Preuve que ρ est transitif :

À démontrer : $(\forall\, x, y, z : \mathbb{N} \mid : x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, z \Rightarrow x \,\rho\, z)$.

Soient $x, y, z : \mathbb{N}$ tels que $x \,\rho\, y \wedge y \,\rho\, z$.

Soient $i, j : \mathbb{N}$ tels que $f^i(x) = f^i(y)$ et $f^j(y) = f^j(z)$. $\langle$ Par déf. de ρ $\rangle$

Soit $k : \mathbb{N}$ tel que $k = i + j$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

Alors, on a $f^k(x) = f^{i+j}(x) = f^{j+i}(x) = f^j(f^i(x)) = f^j(f^i(y)) = f^{j+i}(y)$
$= f^{i+j}(y) = f^i(f^j(y)) = f^i(f^j(z)) = f^{i+j}(z) = f^k(z)$.

$\langle$ Propriétés de l'arithmétique et de la composition et résultats précédents $\rangle$

Donc, $x \,\rho\, z$. $\langle$ Par déf. de ρ $\rangle$

C.Q.F.D.

3. Soit $\sigma \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ la relation suivante :

$$x \; \sigma \; y \quad \equiv \quad \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}.$$

Montrez que σ est une relation d'ordre partiel. Est-ce que σ est une relation d'ordre total ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

Il faut montrer que σ est réflexif, antisymétrique et transitif.

Preuve que σ est réflexif :
À démontrer : $(\forall\; x : \mathbb{N}^* \mid: x \;\sigma\; x)$.
Soit $x : \mathbb{N}^*$.
On a que : $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\}$. $\langle$ Par réflexivité de $\subseteq$ $\rangle$
Donc, $x \;\sigma\; x$

C.Q.F.D.

Preuve que σ est antisymétrique :
À démontrer : $(\forall\; x, y : \mathbb{N}^* \mid: x \;\sigma\; y \wedge y \;\sigma\; x \Rightarrow x = y)$.
Soient $x, y : \mathbb{N}^*$ tels que $x \;\sigma\; y$ et $y \;\sigma\; x$.
On a donc que $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}$
et $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\}$. $\langle$ Par déf. de σ $\rangle$
Et donc que $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\} = \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}$. $\langle$ Par antisymétrie de $\subseteq$ $\rangle$
Pour montrer que $x = y$, nous devons montrer que $x \leq y$ et que $y \leq x$.
$\langle$ Grâce à l'antisymétrie de $\leq$ $\rangle$
Sans perte de généralité, nous ne montrons que $x \leq y$.
On sait que x divise x. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$
Donc, $x \in \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\}$.
Donc, $x \in \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}$. $\langle$ 5 phrases plus haut $\rangle$
Donc, x divise y.
Donc, $x \leq y$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

C.Q.F.D.

Preuve que σ est transitif :
À démontrer : $(\forall\; w, x, y : \mathbb{N}^* \mid: w \;\sigma\; x \wedge x \;\sigma\; y \Rightarrow w \;\sigma\; y)$.
Soient $w, x, y : \mathbb{N}^*$ tels que $w \;\sigma\; x$ et $x \;\sigma\; y$.
On a que $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } w\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\}$
et $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}$. $\langle$ Par déf. de σ $\rangle$
On a donc que $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } w\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}$. $\langle$ Par transitivité de $\subseteq$ $\rangle$
Et finalement que $w \;\sigma\; y$. $\langle$ Par déf. de σ $\rangle$

C.Q.F.D.

Nous avons montré que σ est un ordre partiel.

Nous montrons que σ n'est pas un ordre total.

Preuve :

À démontrer : $\neg(\forall\ x, y : \mathbb{N}^* \ |: x \ \sigma \ y \vee y \ \sigma \ x)$.

Autrement dit : $(\exists\ x, y : \mathbb{N}^* \ |: \neg(x \ \sigma \ y) \wedge \neg(y \ \sigma \ x))$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$

Soient $x = 2$ et $y = 3$. $\langle$ Ces valeurs existent et $x, y \in \mathbb{N}^*$ $\rangle$

Or, $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\} = \{1, 2\} \not\subseteq \{1, 3\} = \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}$

et $\{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\} = \{1, 3\} \not\subseteq \{1, 2\} = \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\}$.

Donc, $\neg(x \ \sigma \ y) \wedge \neg(y \ \sigma \ x)$. $\langle$ Par déf. de σ $\rangle$

C.Q.F.D.

4. Est-ce que $\theta \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une relation d'ordre partiel ? Justifiez votre réponse.

$$x \ \theta \ y \quad \equiv \quad 2x \leq 3y$$

Réponse :

Pour que θ soit une relation d'ordre partiel, il faudrait que θ soit réflexif, antisymétrique et transitif. Or, θ n'a aucune des trois propriétés. Notez qu'une seule des trois démonstrations suivantes suffit.

Preuve que θ n'est pas réflexif :

À démontrer : $\neg(\forall\ x : \mathbb{R} \ |: x \ \theta \ x)$.

Autrement dit : $(\exists\ x : \mathbb{R} \ |: \neg(x \ \theta \ x))$. $\langle$ Loi de De Morgan $\rangle$

Soit $x = -1$. $\langle$ Cette valeur existe et $x \in \mathbb{R}$ $\rangle$

Or, $2x = -2 \not\leq -3 = 3x$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

Donc, $\neg(x \ \theta \ x)$.

C.Q.F.D.

Preuve que θ n'est pas antisymétrique :

À démontrer : $\neg(\forall\ x, y : \mathbb{R} \ |: x \ \theta \ y \wedge y \ \theta \ x \Rightarrow x = y)$.

Autrement dit : $(\exists\ x, y : \mathbb{R} \ |: x \ \theta \ y \wedge y \ \theta \ x \wedge x \neq y)$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$

Soient $x = 8$ et $y = 9$. $\langle$ Ces valeurs existent et $x, y \in \mathbb{R}$ $\rangle$

Or, $2x = 16 \leq 27 = 3y$ (donc $x \ \theta \ y$)

et $2y = 18 \leq 24 = 3x$ (donc $y \ \theta \ x$)

mais $x \neq y$.

C.Q.F.D.

Preuve que θ n'est pas transitif :

À démontrer : $\neg(\forall\ x, y, z : \mathbb{R} \ |: x \ \theta \ y \wedge y \ \theta \ z \Rightarrow x \ \theta \ z)$.

Autrement dit : $(\exists\ x, y, z : \mathbb{R} \ |: x \ \theta \ y \wedge y \ \theta \ z \wedge \neg(x \ \theta \ z))$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$

Soient $x = 9$, $y = 6$ et $z = 4$. $\langle$ Ces valeurs existent et $x, y, z \in \mathbb{R}$ $\rangle$

Or, $2x = 18 \leq 18 = 3y$ (donc $x \ \theta \ y$)

et $2y = 12 \leq 12 = 3z$ (donc $y \ \theta \ z$)

mais $2x = 18 \not\leq 12 = 3z$ (donc $\neg(x \ \theta \ z)$).

C.Q.F.D.

5. Pour chacune des relations suivantes et pour chacune des propriétés de déterminisme, de totalité, d'injectivité et de surjectivité dites si la relation possède la propriété. Justifiez vos réponses.

   (a) $\phi \subseteq [-1,1] \times [-1,1]$;
   $\phi = \{x, y : [-1,1] \mid x^2 + y^2 = 1 : \langle x, y \rangle\}$.

   Réponse :

   Preuve que la relation ϕ n'est pas déterministe :

   À démontrer : $(\exists\, x, y, y' : [-1,1] \mid: x \,\phi\, y \wedge x \,\phi\, y' \wedge y \neq y')$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$

   Soient $x = 0$, $y = 1$ et $y' = -1$. $\langle$ Ces valeurs existent et $x, y, y' \in [-1,1]$ $\rangle$

   Clairement, $x \,\phi\, y$, $x \,\phi\, y'$ et $y \neq y'$. $\langle$ Par déf. de ϕ $\rangle$

   C.Q.F.D.

   Preuve que la relation ϕ est totale :

   À démontrer : $(\forall\, x : [-1,1] \mid: (\exists\, y : [-1,1] \mid: x \,\phi\, y))$.

   Soit $x \in [-1,1]$.

   Alors, $x^2 \in [0,1]$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

   Alors, $1 - x^2 \in [0,1]$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

   Soit $y = \sqrt{1 - x^2}$. $\langle$ y existe car $1 - x^2 \in [0,1]$; de plus, $y \in [-1,1]$ $\rangle$

   Clairement, $x \,\phi\, y$.

   C.Q.F.D.

   La relation ϕ n'est pas injective.
   La preuve est similaire à celle du non-déterminisme.

   La relation ϕ est surjective.
   La preuve est similaire à celle de la totalité.

(b) $\psi \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
$\psi = \{i, j : \mathbb{N} \mid j = i! : \langle i, j \rangle\}$;
Note : la factorielle de 0 est 1.

Réponse :

Preuve que la relation ψ est déterministe :
À démontrer : $(\forall\ i, j, j' : \mathbb{N} \mid: i\ \psi\ j \wedge i\ \psi\ j' \Rightarrow j = j')$.
Soient $i, j, j' : \mathbb{N}$ tels que $i\ \psi\ j$ et $i\ \psi\ j'$.
On a $j = i!$ et $j' = i!$. $\langle$ Par déf. de ψ $\rangle$
Donc, on a $j = j'$. $\langle$ Par transitivité de $=$ $\rangle$
C.Q.F.D.

Preuve que la relation ψ est totale :
À démontrer : $(\forall\ i : \mathbb{N} \mid: (\exists\ j : \mathbb{N} \mid: i\ \psi\ j))$.
Soit $i : \mathbb{N}$.
Soit $j = i!$.
$\langle$ La factorielle est définie sur tous les naturels et produit des naturels $\rangle$
C.Q.F.D.

Preuve que la relation ψ n'est pas injective :
À démontrer : $(\exists\ i, i', j : \mathbb{N} \mid: i\ \psi\ j \wedge i'\ \psi\ j \wedge i \neq i')$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$
Soient $i = 0$, $i' = 1$ et $j = 1$. $\langle$ Ce sont tous des naturels $\rangle$
Clairement, on a $i\ \psi\ j$, $i'\ \psi\ j$ et $i \neq i'$.
C.Q.F.D.

Preuve que la relation ψ n'est pas surjective :
À démontrer : $(\exists\ j : \mathbb{N} \mid: (\forall\ i : \mathbb{N} \mid: \neg(i\ \psi\ j)))$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$
Soit $j = 3$. $\langle$ $3 \in \mathbb{N}$ $\rangle$
Soit $i : \mathbb{N}$.
On a deux cas : $i \leq 2$ ou $i \geq 3$.
Si $i \leq 2$, alors $i! \leq 2 < 3$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$
Si $i \geq 3$, alors $i! \geq 3! = 6 > 3$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$
Donc, pour tout $i : \mathbb{N}$, $i! \neq 3$.
C.Q.F.D.

(c) $\zeta \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
$\zeta = \{x, y : \mathbb{R} \mid x = y^2 : \langle x, y \rangle\}$.

Réponse :

Preuve que la relation ζ n'est pas déterministe :

À démontrer : $(\exists\ x, y, y' : \mathbb{R} \mid: x\ \zeta\ y \wedge x\ \zeta\ y' \wedge y \neq y')$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$
Soient $x = 1$, $y = 1$ et $y' = -1$. $\langle$ Ces valeurs existent et $x, y, y' \in \mathbb{R}$ $\rangle$
Clairement, $x\ \zeta\ y$, $x\ \zeta\ y'$ et $y \neq y'$. $\langle$ Par déf. de ζ $\rangle$

C.Q.F.D.

Preuve que la relation ζ n'est pas totale :

À démontrer : $(\exists\ x : \mathbb{R} \mid: (\forall\ y : \mathbb{R} \mid: \neg(x\ \zeta\ y)))$. $\langle$ Lois de De Morgan $\rangle$
Soit $x = -1$. $\langle$ $x \in \mathbb{R}$ $\rangle$
Soit $y : \mathbb{R}$.
On a $y^2 \geq 0 > x$, donc $x \neq y^2$, donc $\neg(x\ \zeta\ y)$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$

C.Q.F.D.

Preuve que la relation ζ est injective :

À démontrer : $(\forall\ x, x', y : \mathbb{R} \mid: x\ \zeta\ y \wedge x'\ \zeta\ y \Rightarrow x = x')$.
Soient $x, x', y : \mathbb{R}$ tels que $x\ \zeta\ y$ et $x'\ \zeta\ y$.
Donc, on a $x = y^2$ et $x' = y^2$. $\langle$ Par déf. de ζ $\rangle$
Donc, $x = x'$. $\langle$ Par transitivité de $=$ $\rangle$

C.Q.F.D.

Preuve que la relation ζ est surjective :

À démontrer : $(\forall\ y : \mathbb{R} \mid: (\exists\ x : \mathbb{R} \mid: x\ \zeta\ y))$.
Soit $y \in \mathbb{R}$.
Soit $x = y^2$. $\langle$ x est bien défini ; propriétés de l'arithmétique $\rangle$
Clairement, $x\ \zeta\ y$.

C.Q.F.D.

6. Démontrez les propositions suivantes. Vous pouvez construire des applications bijectives (ou injectives ou surjectives) en extension. Toutefois, ce doit être *clair* que toute application construite en extension a la propriété que vous lui attribuez.

   (a) Soit $S = \{x, y, z : \mathbb{Z} \mid x + y + z = 18 : \langle x, y, z\rangle\}$.
   $|S| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$.
   Preuve :
   Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to S$ l'*application* définie par la règle de correspondance :
   $f.\langle x, y\rangle = \langle x, y, 18 - x - y\rangle$. ⟨ Note 2 du fasc. sur les preuves classiques ⟩

   L'application f est injective car
   si $f.\langle x, y\rangle = f.\langle x', y'\rangle$,
   on a $\langle x, y, 18 - x - y\rangle = \langle x', y', 18 - x' - y'\rangle$,
   donc $x = x'$ et $y = y'$, ⟨ Égalité de tuples ⟩
   et donc $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$.

   Soit $\langle x, y, z\rangle \in S$.
   On a donc $x + y + z = 18$ ⟨ Par déf. de S ⟩
   et donc $z = 18 - x - y$.
   Ainsi, $\langle x, y, z\rangle = \langle x, y, 18 - x - y\rangle$.
   On a $\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $f.\langle x, y\rangle = \langle x, y, 18 - x - y\rangle = \langle x, y, z\rangle$.
   Donc l'application f est surjective.

   On a donc une application bijective f entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et S.
   Donc, $|S| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$. ⟨ I.3.8 ⟩
   C.Q.F.D.

   (b) Soient $T = \{i : \mathbb{N} \mid \mathsf{premier}(i)\}$ et $U = \{j : \mathbb{N} \mid \mathsf{pair}(j)\}$.
   $|T| \leq |U|$.
   Note : vous n'avez donc pas à montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
   Preuve :
   Soit $f : T \to U$ l'*application* définie par la règle de correspondance :
   $f(n) = 2n$. ⟨ Note 2 du fasc. sur les preuves classiques ⟩

   f est injective car f est strictement croissante. ⟨ Propriétés de l'arithmétique ⟩

   Ayant une application injective de T vers U, on a $|T| \leq |U|$. ⟨ I.3.2 ⟩
   C.Q.F.D.

(c) Soient $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x : \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ et $\mathbb{R}^{>0} = \{x : \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
$|\mathbb{R}^{\geq 0}| = |\mathbb{R}^{>0}|$.

Preuve :

Soit $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{>0}$ l'*application* définie par la règle de correspondance :

$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$ $\langle$ Note 2 du fasc. sur les preuves classiques $\rangle$

Il faut noter que $(\forall\, n \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid : n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(n) \in \mathbb{N})$

Supposons que $f(n) = f(n')$.
On analyse les deux sous-cas : $f(n) \in \mathbb{N}$ ou $f(n) \notin \mathbb{N}$.
Cas 1 : comme $f(n) \in \mathbb{N}$, on a aussi $f(n'), n, n' \in \mathbb{N}$, donc $n+1 = f(n) = f(n') = n' + 1$ et donc $n = n'$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$
Cas 2 : comme $f(n) \notin \mathbb{N}$, on a aussi $f(n'), n, n' \notin \mathbb{N}$ et $n = f(n) = f(n') = n'$. $\langle$ Propriétés de l'arithmétique $\rangle$
Dans les deux cas, on a $n = n'$.
L'application f est donc injective.

Soit $m \in \mathbb{R}^{>0}$.
On analyse les deux sous-cas : $m \in \mathbb{N}$ ou $m \notin \mathbb{N}$.
Cas 1 : en fait, on a $m \in \mathbb{N}^*$; soit $n = m - 1$; alors, $n \in \mathbb{N}$, donc $n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ et $f(n) = m$.
Cas 2 : soit $n = m$; alors, $n \notin \mathbb{N}$ mais $n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ et $f(n) = m$.
Dans les deux cas, il existe $n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tel que $f(n) = m$.
L'application f est donc surjective.

On a une application bijective f de $\mathbb{R}^{\geq 0}$ vers $\mathbb{R}^{>0}$.
Donc, $|\mathbb{R}^{\geq 0}| = |\mathbb{R}^{>0}|$. $\langle$ I.3.8 $\rangle$

C.Q.F.D.

(d) $|\mathbb{Z} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Preuve :

(Note : à cause de la longueur de la démonstration, j'utilise un style très abrégé. Ne pas imiter !)

On utilise le lemme suivant :
Soient $f : A \to B$ et $g : C \to D$ deux applications bijectives.
Alors, $h : A \times C \to B \times D$ définie par la règle de correspondance
$h.\langle x, y\rangle = \langle f(x), g(y)\rangle$
est une application bijective.
Nous ne présentons pas la preuve de ce lemme. h hérite directement des propriétés de déterminisme, de totalité, d'injectivité et de surjectivité de f et g. La preuve est simple et ennuyeuse.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times [0, 1[$ l'application définie par la règle de correspondance :
$f(x) = \langle \lfloor x\rfloor, x - \lfloor x\rfloor\rangle$.
On peut prouver l'injectivité de f en utilisant cette définition de l'injectivité
$(\forall\ x, y : \mathbb{R} \mid : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$,
et en considérant, sans perte de généralité, que $x < y$ et en analysant les cas $\lfloor x\rfloor = \lfloor y\rfloor$ et $\lfloor x\rfloor < \lfloor y\rfloor$.
On peut prouver la surjectivité de f en considérant $\langle n, q\rangle \in \mathbb{Z} \times [0, 1[$, en choisissant $x = n + q \in \mathbb{R}$ et en constatant que $f(x) = \langle n, q\rangle$.
On a donc une application bijective f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z} \times [0, 1[$.

On a automatiquement une application bijective f^{-1} de $\mathbb{Z} \times [0, 1[$ vers $\mathbb{R}$.
⟨ Conséquence du théorème C.2 ⟩

On obtient une application bijective $g : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \times [0, 1[) \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times [0, 1[$
avec la règle de correspondance $g.\langle m, \langle n, q\rangle\rangle = \langle\langle m, n\rangle, q\rangle$.
J'omet la preuve de bijectivité. Elle est simple et ennuyeuse.

On a vu en classe que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ sont tous deux infinis dénombrables.
C'est-à-dire que $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ et $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
Il existe donc une application bijective $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. ⟨ Par transitivité de $=$ ⟩

Soit l'application bijective $i : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \times [0, 1[)$
définie avec la règle de correspondance $i.\langle n, x\rangle = \langle \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(n), f(x)\rangle$.

Soit l'application bijective $j : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times [0, 1[\to \mathbb{Z} \times [0, 1[$
définie avec la règle de correspondance $j.\langle\langle m, n\rangle, q\rangle = \langle h.\langle m, n\rangle, \mathbf{I}_{[0,1[}(q)\rangle$.

$$\begin{aligned}
\text{Ayant } i :& \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \times [0,1[) && \text{bijective,}\\
g :& \quad \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \times [0,1[) \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times [0,1[&& \text{bijective,}\\
j :& \quad (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times [0,1[\to \mathbb{Z} \times [0,1[&& \text{bijective et}\\
f^{-1} :& \quad \mathbb{Z} \times [0,1[\to \mathbb{R} && \text{bijective,}
\end{aligned}$$

on obtient donc l'application bijective $i \circ g \circ j \circ f^{-1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

⟨ Lemmes C.4 à C.7 ⟩

C.Q.F.D.