Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
MAT-22257

Danny Dubé
Hiver 2009
Version : 20 février

Travail pratique #2
Relations, ensembles infinis et preuves classiques

Questions

À moins d'indications contraires, lorsqu'une question vous demande de justifier votre réponse, il faut fournir une preuve classique complète ; même pour un contre-exemple.

1. Prouvez le théorème **(12.33) Monotonie de** $\circ$: $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta$, de manière classique.
2. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application sur les naturels. Alors, montrez que $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une relation d'équivalence :
$$x \; \rho \; y \quad \equiv \quad (\exists i : \mathbb{N} \mid : f^i(x) = f^i(y)).$$
3. Soit $\sigma \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ la relation suivante :
$$x \; \sigma \; y \quad \equiv \quad \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } x\} \subseteq \{z : \mathbb{N}^* \mid z \text{ divise } y\}.$$
Montrez que σ est une relation d'ordre partiel. Est-ce que σ est une relation d'ordre total ? Justifiez votre réponse.
4. Est-ce que $\theta \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une relation d'ordre partiel ? Justifiez votre réponse.
$$x \; \theta \; y \quad \equiv \quad 2x \leq 3y$$
5. Pour chacune des relations suivantes et pour chacune des propriétés de déterminisme, de totalité, d'injectivité et de surjectivité dites si la relation possède la propriété. Justifiez vos réponses.
   (a) $\phi \subseteq [-1, 1] \times [-1, 1]$;
   $\phi = \{x, y : [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1 : \langle x, y\rangle\}$.
   (b) $\psi \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
   $\psi = \{i, j : \mathbb{N} \mid j = i! : \langle i, j\rangle\}$;
   Note : la factorielle de 0 est 1.
   (c) $\zeta \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
   $\zeta = \{x, y : \mathbb{R} \mid x = y^2 : \langle x, y\rangle\}$.

6. Démontrez les propositions suivantes. Vous pouvez construire des applications bijectives (ou injectives ou surjectives) en extension. Toutefois, ce doit être *clair* que toute application construite en extension a la propriété que vous lui attribuez.

   (a) Soit $S = \{x, y, z : \mathbb{Z} \mid x + y + z = 18 : \langle x, y, z \rangle\}$.
   $|S| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$.

   (b) Soient $T = \{i : \mathbb{N} \mid \mathsf{premier}(i)\}$ et $U = \{j : \mathbb{N} \mid \mathsf{pair}(j)\}$.
   $|T| \leq |U|$.
   Note : vous n'avez donc pas à montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

   (c) Soient $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x : \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ et $\mathbb{R}^{>0} = \{x : \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
   $|\mathbb{R}^{\geq 0}| = |\mathbb{R}^{>0}|$.

   (d) $|\mathbb{Z} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Remise des travaux

Vous devez remettre votre devoir sur papier et dans le **casier jaune** identifié à mon nom. Vous devez remettre le devoir au plus tard le **9 mars, 17h55**.