Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
MAT-22257

Danny Dubé
Hiver 2009
Version : 2 février

Travail pratique #1 — Solutionnaire
Ensembles et relations

Questions et réponses

1. Démontrez les théorèmes suivants. Fournissez une démonstration détaillée avec les numéros des propriétés utilisées. Notez que pour démontrer un théorème donné, vous ne pouvez utiliser que des propriétés introduites avant. Par exemple, vous ne pourriez pas utiliser la propriété **(11.73)** dans la démonstration de la propriété **(11.71)**.

   (a) **(11.46) Affaiblissement :** $S \cap T \subseteq S$.

$$\begin{array}{ll} & x \in S \cap T \\ = & \quad \langle \textbf{(11.29) Axiome, intersection} \rangle \\ & x \in S \wedge x \in T \\ \Rightarrow & \quad \langle \textbf{(3.92)}\text{(b)} \textbf{ Affaiblissement} \rangle \\ & x \in S \end{array}$$

   Ayant établi $x \in S \cap T \Rightarrow x \in S$, le métathéorème **(7.23)** nous permet d'affirmer : $(\forall x \mid : x \in S \cap T \Rightarrow x \in S)$. Or,

$$\begin{array}{ll} & (\forall x \mid : x \in S \cap T \Rightarrow x \in S) \\ = & \quad \langle \textbf{(7.3) Axiome, transfert} \rangle \\ & (\forall x \mid x \in S \cap T : x \in S) \\ = & \quad \langle \textbf{(11.21) Axiome, sous-ensemble} \rangle \\ & S \cap T \subseteq S \end{array}$$

   (b) **(11.74)** $S \subset T \Rightarrow T \not\subseteq S$. (Note : $U \not\subseteq V \equiv \neg(U \subseteq V)$.)

$$\begin{array}{ll} & S \subset T \\ = & \quad \langle \textbf{(11.69)} \rangle \\ & S \subseteq T \wedge \neg(T \subseteq S) \\ \Rightarrow & \quad \langle \textbf{(3.92)}\text{(b)} \textbf{ Affaiblissement} \rangle \\ & \neg(T \subseteq S) \\ = & \quad \langle \text{Abréviation ; voir la préséance des opérateurs} \rangle \\ & T \not\subseteq S \end{array}$$

(c) **(11.79)** $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\}$.

$$
\begin{array}{ll}
 & x \in \mathcal{P}\emptyset \\
= & \quad \langle \ \textbf{(11.32) Axiome, ensemble puissance} \ \rangle \\
 & x \subseteq \emptyset \\
= & \quad \langle \ \textbf{(3.52) Identité de } \wedge \ \rangle \\
 & x \subseteq \emptyset \wedge \mathsf{vrai} \\
= & \quad \langle \ \textbf{(3.100) Métathéorème : Deux théorèmes quelconques sont} \\
 & \quad\ \ \textbf{équivalents} \text{ avec } \textbf{(3.6)} \text{ devient } \textbf{(11.68)} \ \rangle \\
 & x \subseteq \emptyset \wedge \emptyset \subseteq x \\
= & \quad \langle \ \textbf{(11.65) Antisymétrie} \ \rangle \\
 & x = \emptyset \\
= & \quad \langle \ \textbf{(11.6) Appartenance, cas particulier} \ \rangle \\
 & x \in \{y \mid y = \emptyset : y\} \\
= & \quad \langle \ \textbf{(11.1)} \ \rangle \\
 & x \in \{\emptyset\}
\end{array}
$$

Par le métathéorème **(7.23)**, on a donc :

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x| : x \in \mathcal{P}\emptyset \equiv x \in \{\emptyset\}) \\
= & \quad \langle \ \textbf{(11.8) Axiome, extensionnalité} \ \rangle \\
 & \mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\}
\end{array}
$$

(d) **(12.8) Distributivité de $\times$ sur $\cup$:** $S \times (T \cup U) = (S \times T) \cup (S \times U)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & S \times (T \cup U) = (S \times T) \cup (S \times U) \\
= & \quad \langle \ \textbf{(11.8) Axiome, extensionnalité} \ \rangle \\
 & (\forall x, y| : \langle x, y\rangle \in S \times (T \cup U) \equiv \langle x, y\rangle \in (S \times T) \cup (S \times U))
\end{array}
$$

En utilisant le métathéorème **(7.23)**, il suffit d'obtenir l'égalité suivante :

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle x, y\rangle \in S \times (T \cup U) \\
= & \quad \langle \ \textbf{(12.4) Appartenance} \ \rangle \\
 & x \in S \wedge y \in (T \cup U) \\
= & \quad \langle \ \textbf{(11.28) Axiome, union} \ \rangle \\
 & x \in S \wedge (y \in T \vee y \in U) \\
= & \quad \langle \ \textbf{(3.60) Distributivité de } \wedge \textbf{ sur } \vee \ \rangle \\
 & (x \in S \wedge y \in T) \vee (x \in S \wedge y \in U) \\
= & \quad \langle \ \textbf{(12.4) Appartenance} \ \rangle \\
 & (\langle x, y\rangle \in S \times T) \vee (\langle x, y\rangle \in S \times U)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
= & \quad \langle \textbf{(11.28) Axiome, union} \rangle \\
 & \langle x, y \rangle \in (S \times T) \cup (S \times U)
\end{array}
$$

(e) **(12.23)**(b) $\mathsf{Im}(\rho^{-1}) = \mathsf{Dom}(\rho)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{Im}(\rho^{-1}) \\
= & \quad \langle \textbf{(12.18)} \rangle \\
 & \{c \mid (\exists b \mid: b\ \rho^{-1}\ c)\} \\
= & \quad \langle \text{Notation pour les relations binaires} \rangle \\
 & \{c \mid (\exists b \mid: \langle b, c \rangle \in \rho^{-1})\} \\
= & \quad \langle \textbf{(12.19)} \rangle \\
 & \{c \mid (\exists b \mid: \langle c, b \rangle \in \rho)\} \\
= & \quad \langle \text{Notation pour les relations binaires} \rangle \\
 & \{c \mid (\exists b \mid: c\ \rho\ b)\} \\
= & \quad \langle \textbf{(12.17)} \rangle \\
 & \mathsf{Dom}(\rho)
\end{array}
$$

(f) **(12.33) Monotonie de $\circ$:** $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta \\
= & \quad \langle \textbf{(3.75) Définition alternative de} \Rightarrow \rangle \\
 & \neg(\rho \subseteq \sigma) \vee \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta \\
= & \quad \langle \textbf{(11.21) Axiome, sous-ensemble} \rangle \\
 & \neg(\rho \subseteq \sigma) \vee (\forall x, y \mid: \langle x, y \rangle \in \rho \circ \theta \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \sigma \circ \theta) \\
= & \quad \langle \textbf{(7.8) Axiome, distributivité de} \vee \textbf{ sur } \forall \rangle \\
 & (\forall x, y \mid: \neg(\rho \subseteq \sigma) \vee (\langle x, y \rangle \in \rho \circ \theta \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \sigma \circ \theta))
\end{array}
$$

En utilisant le métathéorème **(7.23)**, il suffit de démontrer la proposition suivante :

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\rho \subseteq \sigma) \vee (\langle x, y \rangle \in \rho \circ \theta \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \sigma \circ \theta) \\
= & \quad \langle \textbf{(3.75) Définition alternative de} \Rightarrow \rangle \\
 & \rho \subseteq \sigma \Rightarrow (\langle x, y \rangle \in \rho \circ \theta \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \sigma \circ \theta) \\
= & \quad \langle \textbf{(3.81) Transfert} \rangle \\
 & \rho \subseteq \sigma \wedge \langle x, y \rangle \in \rho \circ \theta \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \sigma \circ \theta
\end{array}
$$

On obtient cette dernière implication ainsi :

$$
\begin{array}{ll}
 & \rho \subseteq \sigma \wedge \langle x, y \rangle \in \rho \circ \theta \\
= & \quad \langle \textbf{(12.24) Définition de} \circ \rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \rho \subseteq \sigma \wedge (\exists z \mid : \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(7.29) Distributivité de } \wedge \textbf{ sur } \exists\ \rangle \\
 & (\exists z \mid : \rho \subseteq \sigma \wedge \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(11.21) Axiome, sous-ensemble}\ \rangle \\
 & (\exists z \mid : (\forall a, b \mid \langle a, b\rangle \in \rho : \langle a, b\rangle \in \sigma) \wedge \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(7.3) Axiome, transfert}\ \rangle \\
 & (\exists z \mid : (\forall a, b \mid : \langle a, b\rangle \in \rho \Rightarrow \langle a, b\rangle \in \sigma) \wedge \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \text{Utilisation indirecte de } \textbf{(7.11)}\text{ ; résultat établi plus bas}\ \rangle \\
 & (\exists z \mid : (\forall a, b \mid : (\langle a, b\rangle \in \rho \Rightarrow \langle a, b\rangle \in \sigma) \wedge \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle z, y\rangle \in \theta)) \\
\Rightarrow & \quad \langle\ \textbf{(7.37) Échange de } \forall, \exists\ \rangle \\
 & (\forall a, b \mid : (\exists z \mid : (\langle a, b\rangle \in \rho \Rightarrow \langle a, b\rangle \in \sigma) \wedge \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle z, y\rangle \in \theta)) \\
\Rightarrow & \quad \langle\ \textbf{(7.20) Élimination}\ \rangle \\
 & (\exists z \mid : (\langle x, z\rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \sigma) \wedge \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(3.82)}\ \rangle \\
 & (\exists z \mid : \langle x, z\rangle \in \rho \wedge \langle x, z\rangle \in \sigma \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(7.26) Transfert}\ \rangle \\
 & (\exists z \mid \langle x, z\rangle \in \rho : \langle x, z\rangle \in \sigma \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
\Rightarrow & \quad \langle\ \textbf{(7.33) Affaiblissement du domaine}\ \rangle \\
 & (\exists z \mid \mathsf{vrai} \vee \langle x, z\rangle \in \rho : \langle x, z\rangle \in \sigma \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(3.38) Zéro de } \vee\ \rangle \\
 & (\exists z \mid : \langle x, z\rangle \in \sigma \wedge \langle z, y\rangle \in \theta) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(12.24) Définition de } \circ\ \rangle \\
 & \langle x, y\rangle \in \sigma \circ \theta
\end{array}
$$

Le résultat qu'il nous reste à établir est un cas particulier de **(7.11)** lorsque $R = \mathsf{vrai}$.

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg(\forall z \mid : \neg R) \Rightarrow ((\forall x \mid R : P \wedge Q) \equiv P \wedge (\forall x \mid R : Q)))[R := \mathsf{vrai}] \\
= & \quad \langle\ \ \rangle \\
 & \neg(\forall z \mid : \neg \mathsf{vrai}) \Rightarrow ((\forall x \mid : P \wedge Q) \equiv P \wedge (\forall x \mid : Q)) \\
= & \quad \langle\ \text{Grâce au résultat établi plus bas}\ \rangle \\
 & \mathsf{vrai} \Rightarrow ((\forall x \mid : P \wedge Q) \equiv P \wedge (\forall x \mid : Q)) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(3.89) Identité à gauche de } \Rightarrow\ \rangle \\
 & (\forall x \mid : P \wedge Q) \equiv P \wedge (\forall x \mid : Q)
\end{array}
$$

L'égalité qui reste à prouver est la suivante :

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x \mid : \neg \mathsf{vrai}) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(7.24) Axiome, De Morgan}\ \rangle \\
 & (\exists x \mid : \mathsf{vrai})
\end{array}
$$

$=$ $\langle$ **(3.37) Axiome, tiers exclus** $\rangle$

$(\exists x \mid x = a \lor x \neq a : \mathsf{vrai})$

$=$ $\langle$ **(6.25) Axiome, division du domaine** car on a $x = a \land x \neq a \equiv$ faux, grâce à **(3.55) Contradiction** $\rangle$

$(\exists x \mid x = a : \mathsf{vrai}) \lor (\exists x \mid x \neq a : \mathsf{vrai})$

$=$ $\langle$ **(6.21) Axiome du point** $\rangle$

$\mathsf{vrai} \lor (\exists x \mid x \neq a : \mathsf{vrai})$

$=$ $\langle$ **(3.38) Zéro du** $\lor$ $\rangle$

vrai

2. Définissez les ensembles suivants par compréhension.
   (a) L'ensemble des naturels qui sont la somme de trois carrés.
   $\{x, y, z : \mathbb{N} \mid: x^2 + y^2 + z^2\}$
   (b) L'ensemble des naturels qui sont le produit de deux nombres premiers. Vous pouvez utiliser le prédicat 'premier'.
   $\{x, y : \mathbb{N} \mid \mathsf{premier}(x) \land \mathsf{premier}(y) : x \cdot y\}$
3. Soit $\rho \subseteq \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}$ la relation telle que $x\ \rho\ y$ si et seulement si x divise y ; c'est-à-dire que $x\ \rho\ y \equiv (\exists z : \mathbb{N} \mid: x \cdot z = y)$.
   (a) Donnez le domaine de ρ.
   $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   (b) Donnez l'image de ρ.
   $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   (c) Donnez ρ^{-1}. Vous pouvez dessiner la relation obtenue.
   $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle,$
   $\langle 4,4\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle\}$
   (d) Décrivez ρ^{-1} en français de la manière la plus simple possible.
   $x\ \rho^{-1}\ y$ si et seulement si x est un multiple de y.
   (e) Calculez ρ^2.
   $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 2,2\rangle,$
   $\langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle\}$
   À noter que $\rho^2 = \rho$.
   (f) Indiquez lesquelles des 6 propriétés du tableau 12.1 ρ possède. Excepté pour l'anti-symétrie, justifiez votre réponse. Si ρ *a* une propriété, donnez une explication convaincante (pas nécessairement une preuve). Si ρ *n'a pas* une propriété, donnez un contre-exemple. Indice : pour la transitivité, utilisez la définition 2.
   Réflexivité : oui. En choisissant $z = 1$, on a $x \cdot z = x$ et donc $x\ \rho\ x$.
   Irréflexivité : non. Contre-exemple : $1\ \rho\ 1$.
   Symétrie : non. Contre-exemple : $1\ \rho\ 2$ mais on n'a pas $2\ \rho\ 1$.
   Antisymétrie : oui.
   Asymétrie : non. Contre-exemple : $1\ \rho\ 1$.
   Transitivité : oui. À cause que $\rho^2 \subseteq \rho$.