

## Travail pratique #1 Ensembles et relations

### Questions

- Démontrez les théorèmes suivants. Fournissez une démonstration détaillée avec les numéros des propriétés utilisées. Notez que pour démontrer un théorème donné, vous ne pouvez utiliser que des propriétés introduites avant. Par exemple, vous ne pourriez pas utiliser la propriété **(11.73)** dans la démonstration de la propriété **(11.71)**.
  - (11.46) Affaiblissement** :  $S \cap T \subseteq S$ .
  - (11.74)**  $S \subset T \Rightarrow T \not\subseteq S$ . (Note :  $U \not\subseteq V \equiv \neg(U \subseteq V)$ .)
  - (11.79)**  $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\}$ .
  - (12.8) Distributivité de  $\times$  sur  $\cup$**  :  $S \times (T \cup U) = (S \times T) \cup (S \times U)$ .
  - (12.23)(b)**  $\text{Im}(\rho^{-1}) = \text{Dom}(\rho)$ .
  - (12.33) Monotonie de  $\circ$**  :  $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \circ \theta \subseteq \sigma \circ \theta$ .
- Définissez les ensembles suivants par compréhension.
  - L'ensemble des naturels qui sont la somme de trois carrés.
  - L'ensemble des naturels qui sont le produit de deux nombres premiers. Vous pouvez utiliser le prédicat 'premier'.
- Soit  $\rho \subseteq \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$  la relation telle que  $x \rho y$  si et seulement si  $x$  divise  $y$ ; c'est-à-dire que  $x \rho y \equiv (\exists z : \mathbf{N} \mid : x \cdot z = y)$ .
  - Donnez le domaine de  $\rho$ .
  - Donnez l'image de  $\rho$ .
  - Donnez  $\rho^{-1}$ . Vous pouvez dessiner la relation obtenue.
  - Décrivez  $\rho^{-1}$  en français de la manière la plus simple possible.
  - Calculez  $\rho^2$ .
  - Indiquez lesquelles des 6 propriétés du tableau 12.1  $\rho$  possède. Excepté pour l'anti-symétrie, justifiez votre réponse. Si  $\rho$  a une propriété, donnez une explication convaincante (pas nécessairement une preuve). Si  $\rho$  n'a pas une propriété, donnez un contre-exemple. Indice : pour la transitivité, utilisez la définition 2.

### Remise des travaux

Vous devez remettre votre devoir sur papier et dans le **casier jaune** identifié à mon nom. Vous devez remettre le devoir au plus tard le **13 février, 12h00**.