MAT-22257

⟨⟨ ***Résolution de récurrences*** ⟩⟩

Par François Laviolette[1]
Université Laval

Version Été 2007

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons des problèmes reliés à la notion de *suite*. Une suite est une séquence infinie de nombres réels. Un élément de cette suite est appelé un *terme* de la suite.

Par exemple, $\langle 0,\, 2,\, 4,\, 6,\, 8,\, \ldots \rangle$ est la représentation en extension de la suite des entiers naturels pairs ou encore $\langle 0,\, 1,\, 4,\, 9,\, 16,\, \ldots \rangle$, celle des carrés parfaits. Voici un exemple plus complexe, connu sous le nom de suite de Fibonacci : $\langle 0,\, 1,\, 1,\, 2,\, 3,\, 5,\, 8,\, 13,\, 21,\, \ldots \rangle$

De façon générale, la suite $\langle a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, \ldots \rangle$ se notera $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.
Il est à noter qu'une telle suite est en fait une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, on peut donc la représenter $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{array}{rcl} f \;:\; \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a_n \end{array}$

Une suite «a_n» ne commence pas nécessairement par l'indice 0, elle peut commencer par

[1]Remerciements à Jean-François Morin, pour avoir fait une relecture attentive de ces notes de cours.

l'indice 1 ou par tout autre élément $n_0 \in \mathbb{Z}$.
Dans ce cas, la suite serait $\langle a_{n_0},\, a_{n_0+1},\, a_{n_0+2},\, a_{n_0+3},\, a_{n_0+4},\, \ldots\rangle$ et se noterait $\langle a_n \rangle_{\substack{n\,\in\,\mathbb{Z}\\ n\,\geq\, n_0}}$.

Dans ce cas, on peut représenter la suite par l'application $\begin{array}{rccl} f & : & \{n : \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & a_n \end{array}$

Une suite peut donc être définie en extension, exemple : $\langle 0,\, 2,\, 4,\, 6,\, 8,\, \ldots\rangle$

ou (de façon plus rigoureuse) en compréhension, exemple : $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & 2n \end{array}$.

La définition en compréhension d'une suite est appelée ***définition par terme général***. Plutôt que d'utiliser le formalisme des applications, on présente généralement une définition par terme général d'une suite en donnant simplement la formule générique permettant de calculer **directement** n'importe quel terme de la suite ainsi que l'ensemble des indices pour lesquels la formule est valide. (Exemple : *Le terme général de la suite* $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *des entiers naturels pairs est* $a_n \;=\; 2n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.)

À part la définition en extension et celle par terme général, il y a une autre façon (tout aussi rigoureuse que celle par terme général) de définir une suite : **la définition par récurrence** qui consiste à se donner directement la valeur du premier terme (ou les valeurs des quelques premiers termes) de la suite ainsi qu'une méthode pour calculer la valeur de n'importe quel terme de la suite en fonction de son (ou ses) prédécesseur(s).

Ainsi, la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ des entiers naturels pairs peut se définir récursivement par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ a_n & = & a_{n-1} + 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

Et la suite de Fibonacci[2] $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ se définit récursivement par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_0 & = & 0 \\ f_1 & = & 1 \\ f_n & = & f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \end{array} \right.$$

[2]Dans la littérature, la suite de Fibonacci est la plupart du temps définie pour $n \geq 1$, c'est-à-dire : $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ et $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n : \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$.

Nous verrons au cours de ce chapitre que le terme général de la suite de Fibonacci est

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le concept de suite se retrouve au centre de l'analyse de plusieurs problèmes en mathématiques et en informatique. On le retrouve entre autres lorsque l'on s'intéresse au nombre total d'étapes qu'un algorithme doit accomplir, ou plus exactement lorsque l'on cherche à calculer le *temps d'exécution* t_n d'un programme en fonction d'un certain paramètre n qui est généralement relié à la taille de la donnée d'entrée.

Exemple R.0.1 Considérons l'algorithme suivant :

$l \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ à n **Faire**
  Pour $j \leftarrow 1$ à i **Faire**
    $l \leftarrow l + 1$

Ici, se demander quel sera (en fonction du paramètre n) le nombre total d'étapes d'exécution de l'algorithme revient en gros à se demander quelle sera la valeur finale de la variable l en fonction du paramètre n. Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ la suite qui, pour chaque n, donne cette valeur finale. Alors, en utilisant la convention appropriée[3], on remarque facilement que

- $a_0 = 0$

Et que

- $a_n = a_{n-1} + n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Il est clairement plus facile dans cet exemple de définir la suite par récurrence. En général, c'est presque toujours le cas, car il est plus facile de comprendre ce que sera la valeur de a_n si on connaît celle de a_{n-1} que de trouver directement la valeur de a_n.

[3]Nous adoptons ici la convention que si $n = 0$, il n'y a pas d'erreur d'exécution, mais que le **Faire** de la première boucle n'est tout simplement pas exécuté.

Pour l'exemple particulier, ci-haut, nous verrons à la section 2 qu'il est quand même relativement simple de trouver le terme général de cette suite, mais ce n'est pas toujours le cas.

Il est important de souligner que quoique la définition par récurrence soit une définition tout à fait rigoureuse, elle n'est pas très pratique. En effet, pour calculer a_{100} dans l'exemple précédent, il nous faut d'abord calculer a_{99} et pour calculer a_{99}, on a besoin de connaître a_{98}, etc. Donc, si on souhaite utiliser la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ pour analyser notre petit algorithme de l'exemple R.0.1 pour chacune des valeurs de n, on serait mieux de travailler avec la définition par terme général de la suite (malheureusement plus difficile à obtenir) au lieu de la définition par récurrence.

L'essentiel de ce chapitre consistera à se donner des outils nous permettant, étant donné une suite définie par récurrence, de trouver sa définition par terme général. Résoudre ce type de problème est faire de la *résolution de récurrences*.

1 Résoudre une récurrence

Méthode 1 : «deviner» la solution et la vérifier par induction mathématique

Dans plusieurs cas plus complexes, c'est encore la seule façon connue à ce jour.

Le principe d'induction mathématique s'énonce de plusieurs façons, la forme la plus couramment utilisée étant :

Théorème R.1.1 Principe d'induction mathématique faible.
Étant donné un prédicat P. Alors,
$\Big(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n) \Rightarrow P(n+1))\Big) \;\Rightarrow\; \Big(\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n)\Big)$
ou, ce qui est équivalent,
$\Big(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid P(n) \;:\; P(n+1))\Big) \;\Rightarrow\; \Big(\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n)\Big)$
ou, ce qui est équivalent,
$\Big(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N}^* \mid : P(n-1) \Rightarrow P(n))\Big) \;\Rightarrow\; \Big(\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n)\Big)$
ou, ce qui est équivalent,
$\Big(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N}^* \mid P(n-1) \;:\; P(n))\Big) \;\Rightarrow\; \Big(\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n)\Big)$

Remarquons qu'après avoir étudié une suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence et «deviné» sa définition par terme général, si on se donne comme prédicat P cette définition par terme général qu'on vient de «deviner», la preuve par induction mathématique qui en découlera devrait alors se faire assez bien, la structure de la définition par récurrence se prêtant assez bien à ce genre de démonstration. Dans ces notes, nous utiliserons surtout la quatrième formulation de ce théorème, car des quatre, c'est celle qui se prête le mieux aux démonstrations reliées aux résolutions de récurrences telles que nous les avons définies. L'exemple suivant devrait rendre cette idée plus précise.

Exemple R.1.2 Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} a_0 &=& 0 \\ a_n &=& a_{n-1} + 2n - 1 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démontrez que $a_n \;=\; n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Prenons le prédicat $\mathrm{P}(n): \quad a_n = n^2$.

Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \mid: \mathrm{P}(n))$.

Et par le principe d'induction mathématique,

il suffit de démontrer que $\mathrm{P}(0) \ \wedge \ (\forall n : \mathbb{N}^* \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Montrons $\mathbf{P(0)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $a_0 = 0^2$).

$$a_0 \ = \ 0 \ = \ 0^2.$$

Montrons $(\forall \mathbf{n} : \mathbb{N}^* \mid \mathbf{P(n-1)} : \mathbf{P(n)})$.

Soit $n : \mathbb{N}^*$, choisi tel que $\mathrm{P}(n-1)$ est vrai. (*C'est-à-dire, tel que* $a_{n-1} \ = \ (n-1)^2$.) [4]

⟨ Et montrons $\mathrm{P}(n)$. (*c'est à dire* $a_n = n^2$.) ⟩

a_n

$=$ ⟨ Définition de $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.⟩

$a_{n-1} + 2n - 1$

$=$ ⟨ Hypothèse d'induction.⟩

$(n-1)^2 + 2n - 1$

$=$ ⟨ Développement d'un trinôme carré parfait.⟩

$(n^2 - 2n + 1) + 2n - 1$

$=$ ⟨ Simplification algébrique.⟩

n^2

On a démontré $(\forall n : \mathbb{N}^* \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Conclusion : on a bien $\Big(\forall n : \mathbb{N} \mid: \mathrm{P}(n)\Big)$,

c'est-à-dire : $a_n \ = \ n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

Il est important de préciser que la preuve par induction mathématique faible peut ne pas être utilisable dans certains cas, notamment par exemple lorsque la suite définie par récurrence ne commence pas à l'indice 0, ou lorsque dans la relation de récurrence

[4] Notons qu'il faut lire l'énoncé ainsi l'énoncé entre parenthèses : «tel que a_{n-1} (*tel que défini par la récurrence ci-haut*) est bien égale à $(n-1)^2$.»

on calcule le terme a_n en fonction de plusieurs de ses prédécesseurs. Voici donc deux des nombreuses autres variantes du principe d'induction mathématique.

Théorème R.1.3

Principe d'induction mathématique faible sur $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ **.**

Étant donné un prédicat P*. Alors,*

$$\Big(P(n_0) \ \wedge\ (\forall n : \mathbb{N} \mid \ n_0 < n \ \wedge\ P(n-1) : P(n))\Big) \ \Rightarrow\ \Big(\forall n : \mathbb{N} \mid n_0 \leq n : P(n)\Big)$$

Théorème R.1.4

Principe d'induction mathématique à deux cas de base.

Étant donné un prédicat P*. Alors,*

$$\Big(P(0) \ \wedge\ P(1) \ \wedge\ (\forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \mid P(n-2) \wedge P(n-1) : P(n))\Big) \ \Rightarrow\ \Big(\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n)\Big)$$

Exemple R.1.5 ***La suite de Fibonacci***

Soit $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \end{cases}$$

Démontrez que $f_n \ = \ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Démonstration Prenons le prédicat $\mathrm{P}(n):\ f_n \ = \ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \mid \mathrm{P}(n))$.

Et par le principe d'induction mathématique à deux cas de base,

il suffit de démontrer que $\mathrm{P}(0) \ \wedge\ \mathrm{P}(1) \ \wedge\ (\forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \mid \mathrm{P}(n-1) \wedge \mathrm{P}(n-2) : \mathrm{P}(n))$.

Avant de démontrer cet énoncé, nous avons besoin de la remarque suivante :

Remarque (∗) : les deux nombres[5] $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les deux zéros[6] du polynôme $y = x^2 - x - 1$. Donc, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les deux seuls nombres réels satisfaisant

[5] Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or. Il a plusieurs propriétés intéressantes, il est présent dans plusieurs théories mathématiques et il est même utilisé en architecture.

[6] Rappelons que les zéros du polynôme $y = ax^2 + bx + c$, sont donnés par la formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

l'équation $0 = x^2 - x - 1$, et donc l'équation $x + 1 = x^2$. Autrement dit, additionner 1 à l'un de ces deux nombres est équivalent à l'élever au carré.

Montrons $\mathbf{P(0)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$).

$$f_0 \;=\; 0 \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0.$$

Montrons $\mathbf{P(1)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$).

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \;=$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) \;=\; 1 \;=\; f_1.$$

Montrons $(\forall \boldsymbol{n} : \mathbb{N} - \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \mid \mathbf{P}(\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) \wedge \mathbf{P}(\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) : \mathbf{P}(\boldsymbol{n}))$.

Soit $n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$, choisi tel que $\mathrm{P}(n-1)$ et $\mathrm{P}(n-2)$ sont vrais.

C'est-à-dire, tel que $f_{n-1} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

et tel que $f_{n-2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$.

⟨ Et montrons $\mathrm{P}(n)$, c'est-à-dire $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ⟩.

f_n

$=$ ⟨ Définition de $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$. ⟩

$f_{n-1} + f_{n-2}$

$=$ ⟨ Hypothèses d'induction. ⟩

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$=$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$=$ ⟨ Mise en évidence double. ⟩

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)$$

$=$ ⟨ Remarque $(*)$, deux fois. ⟩

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$=$ ⟨ Propriété des exposants. ⟩

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

On a démontré $(\forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \mid P(n-1) \wedge P(n-2) : P(n))$.

Conclusion : on a bien $\Big(\forall n : \mathbb{N} \mid \mathrm{P}(n)\Big)$,

c'est-à-dire : $f_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \;-\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant certains que le terme général de la suite de Fibonacci est

$$f_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \;-\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mais si ce terme général ne nous avait pas été donné gratuitement, nous aurions été tous incapables de le deviner. Il nous faut donc de nouveaux outils pour résoudre des récurrences, c'est le propos des prochaines sections.

2 Résoudre une récurrence

Méthode 2 : quatre cas particuliers

Nous nous intéressons dans cette section à quatre familles particulières de suites. Pour chacune des suites appartenant à une de ces familles, le terme général est facile à trouver.

Définition R.2.1 Les suites arithmétiques.
On dit qu'une suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* de *premier terme a* et de *différence d* si

- $a_0 = a$
- la différence entre la valeur du terme a_n et celle du terme a_{n-1} est égale à $d \quad \forall n : \mathbb{N}^*$

Théorème R.2.2 *Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme a et de différence d.*
2. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & a \\ a_n & = & a_{n-1} + d \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

3. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général par :*

$$a_n \ = \ a + nd \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.2.3 La suite des nombre pairs que nous avons vue en introduction est une suite arithmétique de premier terme $a = 0$ et de différence $d = 2$, et on a bien que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ a_n & = & a_{n-1} + 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

et que

$$a_n \ = \ n \cdot 2 \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Définition R.2.4 Les suites géométriques.

On dit qu'une suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* de *premier terme* a et de *raison* r si

- $a_0 = a$
- le rapport[7] entre la valeur du terme a_n et celle du terme a_{n-1} est égale à $r \quad \forall n : \mathbb{N}^*$

Théorème R.2.5 *Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme a et de raison r.*
2. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par*

$$\begin{cases} a_0 & = & a \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot r \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

3. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général par :*

$$a_n \;=\; a \cdot r^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.2.6 La suite des puissances de 2, c'est-à-dire $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots \rangle$, est une suite géométrique de premier terme $a = 1$ et de raison $r = 2$, et on a bien que

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et que

$$a_n \;=\; 1 \cdot 2^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

[7] Le rapport de a_n sur a_{n-1} est le résultat de la division de a_n par a_{n-1}, c'est à dire $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Définition R.2.7 La suite des sommes de premiers termes d'une suite.
Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
On appelle *suite des sommes de premiers termes* de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ la suite

$$\langle\, a_0,\, (a_0 + a_1),\, (a_0 + a_1 + a_2),\ \ldots,\ (a_0 + a_1 + \cdots + a_n),\ \ldots \rangle$$

Ou, autrement dit, la suite $\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} S_0 &= a_0 \\ S_n &= S_{n-1} + a_n \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Théorème R.2.8 *Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme a et de différence d et soit $\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes de premiers termes de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Alors,*

$\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général par :

$$S_n \;=\; \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

Remarquons que «$(n+1)$» représente le nombre de termes de la somme qui donne S_n, «a_0» le premier terme de cette somme et «a_n» le dernier terme.

Exemple R.2.9 Calculez $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$.

Solution : Remarquons que $1+2+3+4+\cdots+100$ est une somme de premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de différence 1.
Notons cette suite arithmétique $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors par le théorème R.2.2, on a $a_n = 1 + n \cdot 1 \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Ainsi,

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$
$=$ ⟨ Car $a_n = 100$ si $n + 1 = 100$, et donc si $n = 99$.⟩
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99}$
$=$ ⟨ Théorème R.2.8.⟩

$\frac{(a_0+a_{99})(99+1)}{2}$
$=$
$\frac{(1+100)(99+1)}{2}$
$=$
$5050.$

C.Q.F.D.

Théorème R.2.10 *Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme a et de raison $r \neq 1$ et soit $\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes de premiers termes de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, $\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général par :*

$$S_n = \frac{a \cdot (1 - r^{n+1})}{1-r} \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

Remarquons que «(n+1)» représente ici aussi le nombre de terme de la somme qui donne S_n.

Exemple R.2.11 Calculez $8+16+32+64+128+\cdots+1\,048\,576$.

Solution : Remarquons que $8+16+32+64+128+\cdots+1\,048\,576$ est une somme de premiers termes de la suite géométrique de premier terme 8 et de raison 2.
Notons cette suite arithmétique $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors par le théorème R.2.5, on a $a_n = 8\cdot 2^n \quad \forall n:\mathbb{N}$.

Ainsi,

$8+16+32+64+128+\cdots+1\,048\,576$

$=$ $\left\langle \begin{array}{r} \text{Car, si } a_n = 1\,048\,576, \quad \text{alors } 8\cdot 2^n = 1\,048\,576, \\ \text{et donc } \;\; 2^n = 131\,072 \\ \text{et donc } \;\; n = \log_2(131\,072) = 17 \end{array} \right\rangle$ [8]

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17}$

$=$ $\langle$ Théorème R.2.10.$\rangle$

$\frac{8\cdot(1-2^{17+1})}{1-2}$

$=$

$2\,097\,144$.

C.Q.F.D.

[8]Rappelons que $\log_2(A) = \frac{\log_{10}(A)}{\log_{10}(2)}$

3 Résoudre une récurrence

Méthode 3 : par les séries génératrices

Dans cette section nous allons développer une méthode plus générale de résolution de récurrences, la méthode *par séries génératrices.*

3.1 L'idée de la méthode

Voici un exemple qui illustre son fonctionnement, nous développerons les outils nécessaires à son utilisation par la suite.

Exemple R.3.1 Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Résolvez cette récurrence.

Solution 1 : Cette récurrence est très simple à résoudre, puisqu'il s'agit ici d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Donc par le théorème R.2.5 on a immédiatement que le terme général de la suite est $\quad a_n = 1 \cdot 2^n \quad \forall n : \mathbb{N}.$

C.Q.F.D.

Solution 2 : (par les séries génératrices)

- Étant donné un x quelconque élément de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$,
  la somme $1 + 2 \cdot x + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + \cdots + 2^n \cdot x^n$ est la somme des $n + 1$ premiers de la suite géométrique $a_n = 1 \cdot (2x)^n \quad \forall n : \mathbb{N}$, qui a premier terme 1 et raison $2x$.
  Par le théorème R.2.10, on a donc

  $$1 + 2 \cdot x + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + \cdots + 2^n \cdot x^n \;=\; \frac{1 \cdot (1 - (2x)^{n+1})}{1 - 2x}$$

  Supposons maintenant que $2x \in \,]-1,\, 1[$, $\quad$ c'est-à-dire que $x \in \left]\frac{-1}{2},\, \frac{1}{2}\right[$.
  Alors on remarque facilement que dans ce cas, plus n devient grand, plus $(2x)^{n+1}$

se rapproche de 0.

Donc, si on fait tendre n vers l'infini, la partie droite de l'équation ci-dessus va tendre vers $\frac{1\cdot(1-0)}{1-2x}$, c'est-à-dire vers $\frac{1}{1-2x}$. Et la partie de gauche de l'équation ci-dessus deviendra une somme contenant un nombre de plus en plus grand de termes, à la limite une somme contenant une infinité de termes.

Autrement dit, à la limite, lorsque $n \to \infty$, et si $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, l'équation ci-dessus devient

$$1 + 2\cdot x + 2^2\cdot x^2 + 2^3\cdot x^3 + \cdots + 2^n\cdot x^n + \ldots \;=\; \frac{1}{1-2x}$$

Il est intéressant de constater que la somme infinie $1 + 2\cdot x + 2^2\cdot x^2 + 2^3\cdot x^3 + \cdots + 2^n\cdot x^n + \ldots$ est en fait une fonction de x, car pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, cette somme infinie coïncide avec la fonction rationnelle[9] d'équation $y = \frac{1}{1-2x}$. Nous verrons bientôt en quoi ce résultat est intéressant pour notre problème.

- Généralisons le procédé de fabrication de ces sommes infinies, et fabriquons une nouvelle fonction G, définie à partir de notre suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début de cet exemple, de la manière suivante :

$$G(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1\,x \;+\; a_2\,x^2 \;+\; a_3\,x^3 \;+\; \cdots \;+\; a_n\,x^n \;+\; \cdots$$

Remarquons que, pour certaines valeurs de x, cette somme infinie sera elle aussi une fonction. Et que la fonction G encode en quelque sorte la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ puisque c'est la suite des coefficients de G.

- Rappelons-nous que $a_n = a_{n-1}\cdot 2 \quad \forall n : \mathbb{N}^*$,
ce qui implique que $a_n - 2\cdot a_{n-1} = 0 \quad \forall n : \mathbb{N}^*$,
ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} a_1 - 2\cdot a_0 &= 0\\ a_2 - 2\cdot a_1 &= 0\\ a_3 - 2\cdot a_2 &= 0\\ a_4 - 2\cdot a_3 &= 0\\ &\text{etc...}\end{aligned}$$

[9]Rappel : une fonction rationnelle est une fonction qui peut s'exprimer comme le quotient de deux polynômes, les constantes étant ici vues comme des polynômes de degré 0.

Maintenant, nous allons essayer d'utiliser cette relation de récurrence et nos connaissances en algèbre pour arriver à écrire la fonction G sous une forme plus simple.

$$\begin{array}{rcccccccccccc} G(x) & = & a_0 & + & a_1\,x & + & a_2\,x^2 & + & a_3\,x^3 & + \cdots + & a_n\,x^n & + & \cdots \\ -2x\cdot G(x) & = & & + & -2\cdot a_0\,x & + & -2\cdot a_1\,x^2 & + & -2\cdot a_2\,x^3 & + \cdots + & -2\cdot a_{n-1}\,x^n & + & \cdots \\ \hline G(x)-2xG(x) & = & a_0 & + & 0\,x & + & 0\,x^2 & + & 0\,x^3 & + \cdots + & 0\,x^n & + & \cdots \end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - 2x\cdot G(x) \;=\; 1$ $\langle$ Car $a_0 = 1.\rangle$

Donc, on a $G(x)(1-2x) \;=\; 1$

Donc, on a $G(x) \;=\; \frac{1}{(1-2x)}$, ce qui est une forme beaucoup plus simple pour exprimer la fonction G.

- Pour terminer le problème, remarquons que nous connaissons déjà la série de puissances associée à $\frac{1}{(1-2x)}$, c'est $1+2\cdot x+2^2\cdot x^2+2^3\cdot x^3+\cdots+2^n\cdot x^n+\cdots$. On a donc

  d'une part que

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & G(x) & = & a_0 & + & a_1\,x & + & a_2\,x^2 & + & a_3\,x^3 & + \cdots + & a_n\,x^n & + \cdots \\ \text{d'autre part que} & & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ & G(x) & = & 1 & + & 2\,x & + & 2^2\,x^2 & + & 2^3\,x^3 & + \cdots + & 2^n\,x^n & + \cdots \end{array}$$

  Ce qui indirectement implique le résultat cherché :

$$a_n \;=\; 2^n \qquad \forall n : \mathbb{N}.$$

C.Q.F.D.

La deuxième solution est bien sûr nettement plus compliquée que la première, mais elle a l'avantage d'être généralisable à des résolutions de récurrence que la méthode utilisée dans la solution 1 ne saurait résoudre. Car si on analyse les différentes étapes de la solution 2 :

1. On a, à partir de la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, créé la série de puissances $G(x) \;=\; a_0 \,+\, a_1\,x \,+$

$a_2\, x^2 \,+\, a_3\, x^3 \,+\, \cdots \,+\, a_n\, x^n \,+\, \cdots$, cette série s'appelle en fait la *série génératrice* de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

2. En utilisant astucieusement la relation de récurrence qui définissait $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, on a réussi à exprimer G sous la forme d'une fonction rationnelle.
3. On a trouvé quelle était la série de puissance qui était associée à cette fonction rationnelle, et ainsi indirectement déterminé le terme général de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

De cette analyse, on peut résumer ainsi
la méthode de résolution de récurrence par séries génératrices :

Étape 1 : À partir de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, construire la *série génératrice*

$$G(x) \,=\, a_0 \,+\, a_1\, x \,+\, a_2\, x^2 \,+\, a_3\, x^3 \,+\, \cdots \,+\, a_n\, x^n \,+\, \cdots$$

Puis en se servant astucieusement de la relation de récurrence définissant $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, on exprime G sous la forme d'une fonction rationnelle

Étape 2 : On décompose la fonction rationnelle trouvé à l'étape 1 en éléments plus simples de façon à ce que pour chacun de ces éléments, on connaisse la série de puissances qui lui est associée. Cette étape s'appelle la *décomposition en fractions partielles.*

Étape 3 : On recompose les différentes séries de puissances associées aux fonctions rationnelles trouvées à l'étape 2, de façon à obtenir la série de puissances associée à G, obtenant ainsi indirectement le terme général de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, résolvant ainsi la récurrence.

Mais avant de pouvoir efficacement résoudre des récurrences par cette méthode, il nous faut connaître plusieurs modèles de séries de puissances et savoir comment on décompose en fractions partielles.

3.2 Modèles de séries de puissances

Théorème R.3.2 *Soient* $a,\, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, *alors* $\forall x \in \,]\frac{-1}{|b|}, \frac{1}{|b|}[$, *on a que*

- $\frac{a}{1-bx} = a + a\,b \cdot x + a\,b^2 \cdot x^2 + a\,b^3 \cdot x^3 + a\,b^4 \cdot x^4 + \cdots + a\,b^n \cdot x^n + \cdots$
- $\frac{a}{(1-bx)^2} = a + 2a\,b \cdot x + 3a\,b^2 \cdot x^2 + 4a\,b^3 \cdot x^3 + \cdots + (n+1)a\,b^n \cdot x^n + \cdots$
- $\frac{ax}{(1-bx)^2} = 0 + a \cdot x + 2a\,b \cdot x^2 + 3a\,b^2 \cdot x^3 + 4a\,b^3 \cdot x^4 + \cdots + n\,a\,b^{n-1} \cdot x^n + \cdots$
- $\frac{a}{(1-bx)^3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot a}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot a \cdot b}{2}\,x + \frac{4 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2}{2}\,x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot a \cdot b^3}{2}\,x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1) \cdot a \cdot b^n}{2}\,x^n + \cdots$

En particulier, nous avons donc les séries de puissances suivantes.

Théorème R.3.3

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$
- $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-1)x + (-1)^2x^2 + (-1)^3x^3 + (-1)^4x^4 + \cdots + (-1)^nx^n + \cdots$
- $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)\,x^n + \cdots$
- $\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + n\,x^n + \cdots$
- $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2}\,x + \frac{4 \cdot 3}{2}\,x^2 + \frac{5 \cdot 4}{2}\,x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,x^n + \cdots$

3.3 Décomposer une fonction rationnelle en fractions partielles

Théorème R.3.4 *Voici la forme de décomposition en fractions partielles de chacune des familles de fonctions rationnelles suivantes :*

- $\frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f}$

  Pourvu que $y = cx + d$ *et* $y = ex + f$ *aient des zéros différents.*

- $\frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{(cx+d)^2}$

- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)(fx+g)(hx+i)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{fx+g} + \frac{C}{hx+i}$

  Pourvu que $y = dx + e$, $y = fx + g$ *et* $hx + i$ *aient des zéros tous différents.*

- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^2(fx+g)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{fx+g}$

  Pourvu que $y = dx + e$ *et* $y = fx + g$ *aient des zéros différents.*

- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^3} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{(dx+e)^3}$

Nous ne démontrerons pas ici pourquoi chacune des fonctions rationnelles appartenant à une de ces familles se décompose effectivement comme le théorème R.3.4 le prescrit. Remarquons que le numérateur de chacune des fractions partielles est toujours une constante. Le résultat énoncé au théorème R.3.4 se généralise à toutes les fonctions rationnelles ; cependant, dans le cas où il y a au dénominateur des zéros qui soient des nombres complexes, le problème devient plus difficile.

3.4 Exemples de résolution de récurrence par la méthode des séries génératrices

Exemple R.3.5 Résolvez la récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & 3 \cdot a_{n-1} + 4^n \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Solution :

Étape 1 : (on exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle)

- On remarque que : $a_n \ - \ 3 \cdot a_{n-1} - (4^n) \ = \ 0 \quad \forall n : \mathbb{N}^*$;
- ce qui en extension donne : $$\begin{array}{c} a_1 - 3 \cdot a_0 - 4 \ = 0 \\ a_2 - 3 \cdot a_1 - 4^2 = 0 \\ a_3 - 3 \cdot a_2 - 4^3 = 0 \\ a_4 - 3 \cdot a_3 - 4^4 = 0 \\ \text{etc...} \end{array}$$
- Posons $G(x) \ = \ a_0 \ + \ a_1 \, x \ + \ a_2 \, x^2 \ + \ a_3 \, x^3 \ + \ \cdots \ + \ a_n \, x^n \ + \ \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcccccccc} G(x) & = & a_0 & + & a_1x + & a_2x^2 + & a_3x^3 + \cdots + & a_nx^n + \cdots \\ -3x \cdot G(x) & = & & + & -3 \cdot a_0x + & -3 \cdot a_1x^2 + & -3 \cdot a_2x^3 + \cdots + & -3 \cdot a_{n-1}x^n + \cdots \\ -\frac{1}{1-4x} & = & -1 & + & -4x + & -(4^2)x^2 + & -(4^3)x^3 + \cdots + & -(4^n)x^n + \cdots \\ \hline G(x) - 3xG(x) - \frac{1}{1-4x} & = & a_0 - 1 & + & 0x + & 0x^2 + & 0x^3 + \cdots + & 0x^n + \cdots \end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - 3x \, G(x) - \frac{1}{1-4x} \ = \ 0$ $\qquad \langle$ Car $\ a_0 - 1 \ = \ 1 - 1 \ = \ 0.\rangle$

Donc, on a $\ G(x)(1 - 3x) \ = \ \frac{1}{1-4x}$

Donc, on a $\ G(x) \ = \ \frac{1}{(1-3x)(1-4x)}$, ce qui est une forme beaucoup plus simple pour exprimer la fonction G.

Étape 2 : (on décompose la fonction G en fractions partielles)

$$
\begin{array}{llcll}
\text{On sait que} & \frac{1}{(1-3x)(1-4x)} & = & \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-4x} & \langle\text{Théorème R.3.4.}\rangle \\
\text{Alors, on a} & \frac{1}{(1-3x)(1-4x)} & = & \frac{A(1-4x)+B(1-3x)}{(1-3x)(1-4x)} & \\
\text{Ce qui implique} & 1 & = & A(1-4x) + B(1-3x) & \\
\text{Donc} & 1 & = & A \cdot 1 - 4Ax + B \cdot 1 - 3Bx & \\
\text{Donc} & 0x + 1 & = & (-4A - 3B)x + (A+B) &
\end{array}
$$

$$
\text{Ce qui donne} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & = & A + B \\ 0 & = & -4A + -3B \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Donc} & 1 - B & = & A & (1') \\
\text{Donc} & 0 & = & -4(1-B) - 3B & \langle\text{Substitution de (1') dans (2)}\rangle \\
\text{Donc} & 0 & = & -4 + 4B - 3B & \\
\text{Donc} & 0 & = & -4 + B & \\
\text{Donc} & B & = & 4 & \\
 & A & = & 1 - 4 \ = \ -3 & \\
\text{Conclusion :} & \frac{1}{(1-3x)(1-4x)} & = & \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1-4x} &
\end{array}
$$

Étape 3 : (on trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question)

$$
\begin{array}{rcl}
G(x) & = & \frac{1}{(1-3x)(1-4x)} \\
 & = & \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1-4x} \\
 & = & -3 \ + \ (-3)\,3 \cdot x \ + \ (-3)\,3^2 \cdot x^2 \ + \ (-3)\,3^3 \cdot x^3 + \cdots + (-3)\,3^n \cdot x^n \ + \cdots \\
 & & \quad + \quad 4 \ + \ (4)\,4 \cdot x \ + \ (4)\,4^2 \cdot x^2 \ + \ (4)\,4^3 \cdot x^3 + \cdots + (4)\,4^n \cdot x^n \ + \cdots \\
 & = & -3 \ + \ -(3^2) \cdot x \ + \ -(3^3) \cdot x^2 \ + \ -(3^4) \cdot x^3 + \cdots + -(3^{n+1}) \cdot x^n \ + \cdots \\
 & & \quad + \quad 4 \ + \ 4^2 \cdot x \ + \ 4^3 \cdot x^2 \ + \ 4^4 \cdot x^3 + \cdots + 4^{n+1} \cdot x^n \ + \cdots \\
 & = & (-3+4) \ + \ (-(3^2)+4^2) \cdot x \ + \ (-(3^3)+4^3) \cdot x^2 \ + \ (-(3^4)+4^4) \cdot x^3 + \cdots + \ (-(3^{n+1})+4^{n+1}) \cdot x^n + \cdots
\end{array}
$$

Réponse : La définition par terme général est $\quad a_n \ = \ -(3^{n+1}) + 4^{n+1} \quad \forall n : \mathbb{N}.$

Avant de faire l'exemple et le théorème qui suivent, nous avons besoin de faire un rappel de certaines propriétés des polynômes de degré 2. Le rappel est valide même si les zéros du polynôme ne sont pas des nombres réels, c'est-à-dire même si $b^2 - 4ac < 0$. Dans ce cas cependant, les calculs se font dans les «nombres complexes».

RAPPEL :

Proposition R.3.6 *Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$, un polynôme de degré deux.*
Soient $\rho_1 := \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $\rho_2 := \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Alors,

- *ρ_1 et ρ_2 sont appelés les **zéros** du polynôme p parce que* $\begin{cases} p(\rho_1) = 0 \quad \textit{et} \quad p(\rho_2) = 0, \\ \textit{mais} \quad p(x) \neq 0 \quad \forall x \neq \rho_1, \rho_2. \end{cases}$

- *Le polynôme p se factorise toujours ainsi :* $\quad p(x) = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

- *De plus, si le polynôme est unitaire (c'est-à-dire si $a = 1$), on a toujours que*

$$\begin{cases} (*) & \rho_1 + \rho_2 = -b \\ (**) & \rho_1 \cdot \rho_2 = c. \end{cases}$$

Pour les calculs que nous aurons à faire dans ce chapitre, la proposition suivante, qui découle presque directement de la précédente, nous sera très utile.

Proposition R.3.7 *Soit $p(x) = x^2 - rx - s$, un polynôme de degré deux.*
Et soient ρ_1 et ρ_2 les deux zéros (non nécessairement distincts) du polynôme p.

Alors le polynôme $q(x) = 1 - rx - sx^2$ se factorise ainsi :

$$1 - rx - sx^2 \;=\; (1 - \rho_1 x)(1 - \rho_2 x)\,.$$

Exemple R.3.8 Résolvez la récurrence de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

Solution :

Étape 1 : (on exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle)

- On remarque que : $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0 \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$;
- ce qui en extension donne : $$\begin{array}{c} f_2 - f_1 - f_0 = 0 \\ f_3 - f_2 - f_1 = 0 \\ f_4 - f_3 - f_2 = 0 \\ f_5 - f_4 - f_3 = 0 \\ \text{etc...} \end{array}$$
- Posons $G(x) = f_0 + f_1\,x + f_2\,x^2 + f_3\,x^3 + \cdots + f_n\,x^n + \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcl} G(x) &=& f_0 + \quad f_1x + \; f_2x^2 + \; f_3x^3 + \cdots + \quad f_nx^n + \cdots \\ -x \cdot G(x) &=& \quad + \; -f_0x + -f_1x^2 + -f_2x^3 + \cdots + -f_{n-1}x^n + \cdots \\ -x^2 \cdot G(x) &=& \qquad\qquad + -f_0x^2 + -f_1x^3 + \cdots + -f_{n-2}x^n + \cdots \\ \hline G(x) - xG(x) - x^2G(x) &=& f_0 + (f_1 - f_0)x + \; 0x^2 + \; 0x^3 + \cdots + \; 0x^n + \cdots \end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - x\,G(x) - x^2\,G(x) = x$ $\qquad \langle$ Car $f_0 = 0$ et $f_1 - f_0 = 1 - 1 = 1.\rangle$

Donc, on a $G(x)(1 - x - x^2) = x$

Donc, on a $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Donc on a $G(x) = \dfrac{x}{\left(1-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})x\right)\left(1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})x\right)}$. $\left\langle \begin{array}{l} \text{Voir Proposition R.3.7, avec } q(x) := 1 - x - x^2. \\ \text{Les deux zéros de } p(x) = x^2 + -1 \cdot x - 1 \\ \text{étant } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right). \end{array} \right\rangle$

Pour simplifier l'écriture, posons $\rho_1 := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\rho_2 := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Donc on a $G(x) = \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)}$.

Étape 2 : (on décompose la fonction G en fractions partielles)

$$\begin{array}{llcll}
\text{On sait que} & \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\;(1-\rho_2\,x)} & = & \frac{A}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{B}{(1-\rho_2\,x)} & \langle\text{Théorème R.3.4.}\rangle \\[2ex]
\text{Alors, on a} & \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\;(1-\rho_2\,x)} & = & \frac{A(1-\rho_2\,x)+B(1-\rho_1\,x)}{(1-\rho_1\,x)\;(1-\rho_1\,x)} & \\[2ex]
\text{Ce qui implique} & x & = & A(1-\rho_2\,x) + B(1-\rho_1\,x) & \\
\text{Donc} & x & = & A - A\,\rho_2\,x + B - B\,\rho_1\,x & \\
\text{Autrement dit} & 0\;+\;1\cdot x & = & (A+B)\;+\;(-A\,\rho_2 - B\,\rho_1)\cdot x &
\end{array}$$

$$\text{Ce qui donne}\quad \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & A+B \\ 1 & = & -\rho_2 A\;+\;-\rho_1 B \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll}
\text{Donc} & B & = & -A & (1') \\
\text{Donc} & 1 & = & -\rho_2 A\;+\;-\rho_1\cdot(-A) & \langle\text{Substitution de (1') dans (2)}\rangle \\
\text{Donc} & 1 & = & (-\rho_2+\rho_1)\,A & \\
\text{Donc} & A & = & \frac{1}{\rho_1-\rho_2} & \\[2ex]
\text{On a donc aussi} & B & = & -\frac{1}{\rho_1-\rho_2} & \\
\text{Donc} & B & = & \frac{-1}{\rho_1-\rho_2} & \\[2ex]
\text{Conclusion :} & \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\;(1-\rho_2\,x)} & = & \frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_2\,x)} &
\end{array}$$

Et comme $\rho_1 - \rho_2 \;=\; \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{-\sqrt{5}}{2} \;=\; \sqrt{5},$

On a donc $G(x) \;=\; \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\;(1-\rho_2\,x)} \;=\; \frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_2\,x)} \;=\; \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_2\,x)}$

Étape 3 : (on trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question)

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_1\, x)} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_2\, x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\rho_1 \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^2 \cdot x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^3 \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^n \cdot x^n + \cdots \\
&\quad + \frac{-1}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,\rho_2 \cdot x + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^2 \cdot x^2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^3 \cdot x^3 + \cdots + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^n \cdot x^n + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\rho_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,\rho_2\right) \cdot x + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^2\right) \cdot x^2 + \\
&\qquad + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^3 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^3\right) \cdot x^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^n\right) \cdot x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

Réponse : La définition par terme général est $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^n \quad \forall n : \mathbb{N}.$

Autrement dit : $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n : \mathbb{N}.$

C.Q.F.D.

En analysant la solution de l'exemple précédent, on remarque que toute résolution de récurrence ayant une forme semblable à celle de la récurrence de Fibonacci devrait avoir une solution similaire à celle de Fibonacci. Si tel est le cas, alors il y a probablement moyen de trouver une solution générique qui nous permettrait de résoudre plusieurs autres récurrences sans avoir à refaire tous les calculs reliés à la méthode de résolution par séries génératrices. C'est le sujet de la prochaines section.

4 Résoudre une récurrence

Méthode 4 : le cas des relations de récurrence linéaires et homogènes

Définition R.4.1 Une relation de récurrence est dite *linéaire, homogène d'ordre k* si la formule permettant de calculer $n^{\text{ème}}$ terme de la suite est une combinaison linéaire des k termes précédents.

Exemple R.4.2 La relation de récurrence suivante est une relation linéaire, homogène d'ordre 4.

$$\begin{cases} a_0 &= 9 \\ a_1 &= \pi \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 54 \\ a_n &= 8 \cdot a_{n-2} + 7 \cdot a_{n-4} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

Notons que la formule permettant de calculer a_n, le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite, est bien une combinaison linéaire des 4 termes précédents puisque

$$a_n = 0 \cdot a_{n-1} + 8 \cdot a_{n-2} + 0 \cdot a_{n-3} + 7 \cdot a_{n-4}.$$

Exemple R.4.3 La relation de récurrence de la suite de Fibonacci est une relation linéaire, homogène d'ordre 2.

Exemple R.4.4 La relation de récurrence d'une suite géométrique est une relation linéaire, homogène d'ordre 1.

On peut conclure du dernier exemple qu'il existe une formule permettant de résoudre très rapidement les relations de récurrence linéaire, homogène d'ordre 1 (Voir le théorème R.2.5). Le prochain résultat (Théorème R.4.5) nous donne une formule permettant de résoudre très rapidement les relations de récurrences linéaires, homogènes d'ordre 2.

Théorème R.4.5 ***Récurrences linéaires, homogènes d'ordre 2***

Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite définie récursivement par :*

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ a_1 &= b \\ a_n &= r \cdot a_{n-1} + s \cdot a_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \end{cases}$$

où a, b, r *et* s *sont des constantes réelles.*

Soit p, *le polynôme caractéristique de la suite* $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, *(c.-à-d. :* $p(x) = x^2 - rx - s$*).*

Et soient ρ_1 *et* ρ_2 *les zéros de ce polynôme.*

Alors, le terme général de la suite est

$$a_n \nearrow = A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot (\rho_2)^n \quad n : \mathbb{N} \qquad \text{si } \rho_1 \neq \rho_2.$$

$$a_n \searrow = A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot n \cdot (\rho_1)^n \quad n : \mathbb{N} \qquad \text{si } \rho_1 = \rho_2$$

Où A *et* B *sont deux constantes déterminées par les conditions initiales de la récurrence (c.-à-d. : par* $a_0 = a$ *et* $a_1 = b$*).*

Démonstration

Cas 1 : $\rho_1 \neq \rho_2$.

La démonstration pour ce cas est très semblable à la solution de l'exemple R.3.8.

Étape 1 : (on exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle)

- On remarque que : $a_n - r \cdot a_{n-1} - s \cdot a_{n-2} = 0 \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\}$;
- ce qui en extension donne : $$\begin{aligned} a_2 - ra_1 - sa_0 &= 0 \\ a_3 - ra_2 - sa_1 &= 0 \\ a_4 - ra_3 - sa_2 &= 0 \\ a_5 - ra_4 - sa_3 &= 0 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$
- Posons $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcl}
G(x) & = & a_0 + \quad a_1 x + \quad a_2 x^2 + \quad a_3 x^3 + \cdots + \quad a_n x^n + \cdots \\
-rx \cdot G(x) & = & \quad + \quad -ra_0 x + -ra_1 x^2 + -ra_2 x^3 + \cdots + -ra_{n-1} x^n + \cdots \\
-sx^2 \cdot G(x) & = & \qquad\qquad + -sa_0 x^2 + -sa_1 x^3 + \cdots + -sa_{n-2} x^n + \cdots \\
\hline
G(x) - rxG(x) - sx^2 G(x) & = & a_0 + (a_1 - ra_0)x + \quad 0x^2 + \quad 0x^3 + \cdots + \quad 0x^n + \cdots
\end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - rx\,G(x) - sx^2\,G(x) \;=\; a_0 + (a_1 - ra_0)x$

Donc, on a $G(x)(1 - rx - sx^2) \;=\; a_0 + (a_1 - ra_0)x$

Donc, on a $G(x) \;=\; \frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{1 - rx - sx^2}$.

Donc on a $G(x) \;=\; \frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{(1 - \rho_1\,x)\;(1 - \rho_2\,x)}$. $\left\langle \begin{array}{l} \text{Voir Proposition R.3.7, avec } q(x) := 1 - rx - sx^2. \\ \text{Les deux zéros de } p(x) \;=\; x^2 - rx - s \\ \text{étant par hypothèse } \rho_1 \text{ et } \rho_2. \end{array} \right\rangle$

Étape 2 : (on décompose la fonction G en fractions partielles)

On sait que $\frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{(1 - \rho_1\,x)\;(1 - \rho_2\,x)} \;=\; \frac{A}{(1 - \rho_1\,x)} + \frac{B}{(1 - \rho_2\,x)}$ ⟨Théorème R.3.4.⟩

Notons que nous ne calculerons pas ici les valeurs de A et B puisque ce n'est pas nécessaire pour la démonstration.

Étape 3 : (on trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question)

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{A}{(1 - \rho_1\,x)} + \frac{B}{(1 - \rho_2\,x)} \\
&= A + A\,\rho_1 \cdot x + A\,(\rho_1)^2 \cdot x^2 + A\,(\rho_1)^3 \cdot x^3 + \cdots + A\,(\rho_1)^n \cdot x^n + \cdots \\
&\quad + \; B + B\,\rho_2 \cdot x + B\,(\rho_2)^2 \cdot x^2 + B\,(\rho_2)^3 \cdot x^3 + \cdots + B\,(\rho_2)^n \cdot x^n + \cdots \\
&= (A + B) + (A\,\rho_1 + B\,\rho_2) \cdot x + \big(A\,(\rho_1)^2 + B\,(\rho_2)^2\big) \cdot x^2 + \\
&\qquad + \big(A\,(\rho_1)^3 + B\,(\rho_2)^3\big) \cdot x^3 + \cdots\cdots + (A\,(\rho_1)^n + B\,(\rho_2)^n) \cdot x^n + \cdots
\end{aligned}$$

Conclusion : La définition par terme général est bien $a_n \;=\; A\,(\rho_1)^n + B\,(\rho_2)^n \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Cas 2 : $\rho_1 = \rho_2$. *À faire en exercice.*

C.Q.F.D.

Exemple R.4.6 En utilisant le théorème R.4.5, résolvez la récurrence de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

Solution :

1.- Trouvons la «forme» du terme général de la suite.

Le polynôme caractéristique de la suite $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est $p(x) = x^2 - (1) \cdot x - (1)$.

Et les deux zéros de ce polynôme sont $\begin{cases} \rho_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \rho_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Donc, par le théorème R.4.5,
la forme du terme général de la suite est $f_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
où A et B sont deux constantes.

2.- Trouvons les valeurs des constantes A et B.

On sait que $\begin{cases} A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = f_0 = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = f_1 = 1 \end{cases}$

Ce qui donne $\begin{cases} A + B = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$

En résolvant, on trouve facilement que $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

3.- Réponse : Le terme général cherché est $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

5 ANNEXE : Démonstration du principe d'induction

Dans la démonstration du Principe d'induction, on utilise l'axiome suivant :

Axiome : $\mathbb{N}$ est un ensemble *bien ordonné*. (C'est-à-dire : tout sous-ensemble non-vide de l'ensemble $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.)

Théorème R.5.1 (Principe d'induction.) *Étant donné un prédicat P,*

$$\Big(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid: P(n) \Rightarrow P(n+1))\Big) \Rightarrow \Big(\forall n : \mathbb{N} \mid: P(n)\Big)$$

Démonstration (***Preuve par contradiction.***)
Supposons le contraire,
c'est-à-dire que $\Big(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid: P(n) \Rightarrow P(n+1))\Big)$, mais $\neg\Big(\forall n : \mathbb{N} \mid: P(n)\Big)$. $\langle$ *Et cherchons une contradiction.* $\rangle$

Soit A, l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}$ pour lesquels $P(n)$ est faux.

Selon notre hypothèse, $A \neq \emptyset$.

Soit n_0, le plus petit élément de A. $\langle$ Un tel n_0 existe car $\mathbb{N}$ est bien ordonné et A est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$. $\rangle$

Comme, par hypothèse on a que $P(0)$ est vrai, on a donc que $n_0 \neq 0$.

Donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$.

Et comme n_0 est le plus petit élément de A, on a que $P(n_0 - 1)$ est vrai.

Donc $P(n_0)$ est lui aussi vrai. $\langle$ Par l'hypothèse $(\forall n : \mathbb{N} \mid: P(n) \Rightarrow P(n+1))$, avec $[n := n_0 - 1]$. $\rangle$

Donc $n_0 \notin A$.

Le nombre naturel n_0 est donc à la fois le plus petit élément de A et pas un élément de A. **Contradiction**.

Ainsi, on ne peut supposer le contraire. C'est donc que l'énoncé à démontrer est vrai.

C.Q.F.D.

Théorème R.5.2 ***Récurrences linéaires, homogènes d'ordre 2***

Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite définie récursivement par :*

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ a_1 &= b \\ a_n &= r \cdot a_{n-1} + s \cdot a_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \end{cases}$$

où a*,* b*,* r *et* s *sont des constantes réelles.*

Soit p*, le polynôme caractéristique de la suite* $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *(c.-à-d. :* $p(x) = x^2 - rx - s$*).*

Et soient ρ_1 *et* ρ_2 *les zéros de ce polynôme.*

Alors, le terme général de la suite est

$$a_n \nearrow = A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot (\rho_2)^n \quad n : \mathbb{N} \qquad \textit{si } \rho_1 \neq \rho_2.$$

$$a_n \searrow = A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot n \cdot (\rho_1)^n \quad n : \mathbb{N} \qquad \textit{si } \rho_1 = \rho_2$$

où A *et* B *sont deux constantes déterminées par les conditions initiales de la récurrence (c.-à-d. : par* $a_0 = a$ *et* $a_1 = b$*).*

Démonstration

Cas 2 : $\rho_1 = \rho_2$.

Étape 1 : (on exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle)

- On remarque que : $a_n - r \cdot a_{n-1} - s \cdot a_{n-2} = 0 \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\}$;
- ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} a_2 - ra_1 - sa_0 &= 0 \\ a_3 - ra_2 - sa_1 &= 0 \\ a_4 - ra_3 - sa_2 &= 0 \\ a_5 - ra_4 - sa_3 &= 0 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

- Posons $G(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots + a_n\,x^n + \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcl}
G(x) & = & a_0 + \quad a_1x + \quad a_2x^2 + \quad a_3x^3 + \cdots + \quad a_nx^n + \cdots \\
-rx \cdot G(x) & = & \quad + \quad -ra_0x + -ra_1x^2 + -ra_2x^3 + \cdots + -ra_{n-1}x^n + \cdots \\
-sx^2 \cdot G(x) & = & \quad + -sa_0x^2 + -sa_1x^3 + \cdots + -sa_{n-2}x^n + \cdots \\
\hline
G(x) - rxG(x) - sx^2G(x) & = & a_0 + (a_1 - ra_0)x + \quad 0x^2 + \quad 0x^3 + \cdots + \quad 0x^n + \cdots
\end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - rx\, G(x) - sx^2\, G(x) \; = \; a_0 + (a_1 - ra_0)x$

Donc, on a $\quad G(x)(1 - rx - sx^2) \; = \; a_0 + (a_1 - ra_0)x$

Donc, on a $\quad G(x) \; = \; \frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{1 - rx - sx^2}$.

Donc on a $\quad G(x) \; = \; \frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{(1-\rho_1\, x)\; (1-\rho_2\, x)}$. $\left\langle \begin{array}{l} \text{Voir Proposition R.3.7, avec } q(x) := 1 - rx - sx^2. \\ \text{Les deux zéros de } \; p(x) \; = \; x^2 - rx - s \\ \text{étant par hypothèse } \; \rho_1 \text{ et } \rho_2. \end{array} \right\rangle$

Et comme $\rho_1 = \rho_2$, on a donc $\quad G(x) \; = \; \frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{(1-\rho_1\, x)^2}$.

Étape 2 : (on décompose la fonction G en fractions partielles)

On sait que $\frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{(1-\rho_1\, x)^2} \quad = \quad \frac{C}{(1-\rho_1\, x)} + \frac{D}{(1-\rho_1\, x)^2}$ $\qquad \langle$Théorème R.3.4.$\rangle$

Étape 3 : (on trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question)

$$\begin{aligned}
G(x) \quad &= \quad \frac{C}{(1-\rho_1\, x)} + \frac{D}{(1-\rho_2\, x)^2} \\
&= \quad C + C\,\rho_1 \cdot x + C\,(\rho_1)^2 \cdot x^2 + C\;(\rho_1)^3 \cdot x^3 + \cdots + C\;(\rho_1)^n \cdot x^n + \cdots \\
&\qquad + \quad D + 2 \cdot D\;\rho_2 \cdot x + 3 \cdot D\;(\rho_2)^2 \cdot x^2 + 4 \cdot D\;(\rho_2)^3 \cdot x^3 + \cdots + (n+1) \cdot D\;(\rho_2)^n \cdot x^n + \cdots \\
&= \quad (C + D) + (C\;\rho_1 + 2 \cdot D\;\rho_2) \cdot x + \big(C\;(\rho_1)^2 + 3 \cdot D\;(\rho_2)^2\big) \cdot x^2 + \\
&\qquad\qquad + \big(C\;(\rho_1)^3 + 4 \cdot D\;(\rho_2)^3\big) \cdot x^3 + \cdots\cdots + (C\;(\rho_1)^n + (n+1) \cdot D\;(\rho_2)^n) \cdot x^n + \cdots
\end{aligned}$$

Conclusion :

La définition par terme général est $a_n = C\,(\rho_1)^n + (n+1)\cdot D\,(\rho_1)^n \quad \forall n : \mathbb{N}.$

Ce qui est équivalent à $a_n = C\,(\rho_1)^n + n\cdot D\,(\rho_1)^n + 1\cdot D\,(\rho_1)^n \quad \forall n : \mathbb{N}.$

Ce qui est équivalent à $a_n = (C+D)\,(\rho_1)^n + n\cdot D\,(\rho_1)^n \quad \forall n : \mathbb{N}.$

Ce qui si on pose $[A := C + D]$
et $[B := D]$, est équivalent à $a_n = A\,(\rho_1)^n + n\cdot B\,(\rho_1)^n \quad \forall n : \mathbb{N}.$

C.Q.F.D.