MAT-22257

⟨⟨*Chapitre sur les ensembles infinis*⟩⟩

Par François Laviolette[1]
Université Laval

Version : Été 2007

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux ensembles de taille infinie. Même en informatique, nous sommes confrontés à de telles structures, entre autres lorsque l'on se demande quelles sont les possibilités et les limites de l'informatique, par exemple : *"qu'est-ce qui est calculable en informatique ?"* ou encore *"étant donné un problème, pourrons-nous toujours décider si ce problème a une solution ou non ?"* Ou, dans un autre ordre d'idées, si on souhaite développer un système qui aura à interagir avec le monde réel, ce monde réel, la plupart du temps, fait appel à des paramètres continus, telles la distance, la température, la vitesse. Ces paramètres peuvent prendre une infinité de valeurs différentes.

Les structures infinies sont en général beaucoup plus difficiles à étudier que les structures finies. Notre intuition, généralement solide face aux structures finies, est grandement mise à mal lorsque l'on s'attaque à l'infini. À titre d'exemple :

[1]Remerciements à Jean-François Morin, pour avoir fait une relecture attentive de ces notes de cours.

Une charrue enlève la neige le long d'une route qui s'étend jusqu'à l'infini. Tout au long de la route, il y a 15 cm de neige. La pelle de la charrue laisse écouler un quinzième de la neige qui entre dans sa pelle (c.-à-d. : 1 cm de neige sur les 15). Supposant que la pelle a une capacité infinie et que les flocons qu'elle laisse écouler sortent selon le principe du premier arrivé, premier servi, quelle quantité de neige restera dans la pelle pour toujours ?

Cet exemple est bien sûr irréalisable dans notre monde. Si on fait cependant abstraction de ce petit détail et qu'on analyse logiquement le problème, on est obligé de constater que chaque flocon qui entre dans la pelle finira par en sortir par en dessous, et donc "qu'une fois le travail terminé", il ne restera plus rien dans la pelle.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement au problème de la cardinalité des ensembles. Nous savons déjà que calculer la cardinalité d'un ensemble **fini** revient à compter le nombre d'éléments que cet ensemble contient. Il est évident que dans le cas des ensembles infinis, cette approche n'est pas envisageable. Pour les ensembles infinis, nous ne pourrons faire mieux que de comparer les ensembles infinis les uns avec les autres. Nous aurons donc des résultats du type :

- un ensemble A *a autant d'éléments* qu'un ensemble B,
  ce que nous traduirons par : *la cardinalité de A est égale à celle de B* ;
  ou encore
- un ensemble A *a moins d'éléments* qu'un ensemble B,
  ce que nous traduirons par : *la cardinalité de A est plus petite que celle de B.*

Encore une fois, dans le cas des ensembles finis, dire qu'un ensemble A a moins, autant, ou plus d'éléments qu'un ensemble B n'est pas compliqué, il nous suffit de savoir "compter jusque-là". Dans le cas des ensembles infinis, on *ne sait clairement pas* "compter jusque-là". Il nous faudra donc développer une autre méthode pour arriver à nos fins.

En plus, quelques surprises nous attendent. L'exemple suivant nous en donne un avant-goût :

Un hôtel a un nombre infini de chambres (pour chaque entier $i > 0$, il y a *une chambre portant le numéro i). L'hôtel est plein (il y a un voyageur dans chaque chambre). Arrive un nouveau voyageur qui voudrait bien dormir à l'hôtel lui aussi. Alors l'hôtelier lui dit qu'il va lui trouver une chambre. Il ne mettra à la porte aucun voyageur, il ne mettra pas deux voyageurs dans une même chambre et il ne fera pas construire une nouvelle chambre. Alors comment l'hôtelier fera-t-il ?*

Si on énumère par $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ l'ensemble des numéros de porte des chambres de l'hôtel, qu'on donne au nouveau voyageur l'étiquette "0" et à chaque voyageur déjà dans une chambre l'étiquette correspondant au numéro de sa chambre, voici ce que l'hôtelier peut faire :

– *Installer le voyageur "0" dans la chambre "1" ;*
– *Déménager le voyageur "1" dans la chambre "2" ;*
– *Déménager le voyageur "2" dans la chambre "3" ;*
– *Déménager le voyageur "3" dans la chambre "4" ;*
– *etc.*

Cette solution va bien sûr déranger beaucoup de monde mais, en bout de ligne, chaque voyageur dormira seul dans une chambre.

Le fait qu'il y ait une solution à ce problème choque notre intuition. Ce choc vient du fait que, logiquement, il nous faut conclure qu'**il y a autant d'éléments** dans $\mathbb{N}^*$ que dans $\mathbb{N}$, alors que le premier ensemble est **strictement inclus** dans le second ; la notion d'avoir autant d'éléments semble être plutôt élastique dans le cas des ensembles infinis.

Il devient donc de plus en plus évident que le problème du calcul de la cardinalité d'un ensemble infini sera un problème difficile à résoudre. En fait, comme il a déjà été dit auparavant, on ne répondra pas directement à la question "combien tel ensemble infini a-t-il d'éléments ?". On va plutôt comparer deux à deux les ensembles, en se demandant s'ils ont autant d'éléments l'un que l'autre ou si l'un en a plus que l'autre. De ces éléments de comparaison, on va pouvoir déduire une hiérarchie des cardinalités des différents ensembles infinis.

2 “Avoir autant d’éléments”

2.1 À la recherche d’une définition

Si on veut arriver à bien définir cette notion d’ensemble infini ayant autant d’éléments qu’un autre, il nous faudra trouver une méthode qui, dans le cas fini, permet d’établir si oui ou non deux ensembles ont le “même nombre d’éléments”, sans qu’on ait eu recours à notre capacité de compter les éléments des ensembles finis. On est en effet en droit d’espérer qu’une telle méthode soit applicable aux ensembles infinis. Nous sommes donc face à ce problème un peu comme un tout jeune enfant qui a dans une main des pierres blanches et dans l’autre des pierres noires, et qui se demande si, oui ou non, chaque main a autant de pierres.

Voici une solution qui convient au niveau des capacités de l’enfant (en fait cette solution a vraiment été proposée à un enfant de trois ans) :

> Prends une pierre blanche et une pierre noire et place-les côte à côte, puis prends une autre pierre blanche et une autre pierre noire et place-les côte à côte, juste en dessous de celles que tu as déjà placées, continue ce processus tant qu’il reste de pierres de chacun des deux tas. Si les deux tas se finissent en même temps, c’est que tu en avais autant dans chaque main, sinon c’est le tas dans lequel il reste encore des pierres qui en avait le plus.

Ce que l’enfant fabrique par ce procédé est une relation entre le tas des pierres blanches et celui des pierres noires. Si nous sommes dans la situation où les deux tas sont épuisés en même temps, c’est que la relation fabriquée est une application bijective. Autrement dit, dans le cas fini, nous avons le résultat suivant :

Théorème I.2.1 *Deux ensembles finis A et B ont le même nombre d’éléments si et seulement s’il existe une application bijective $f : A \longrightarrow B$.*

Rappelons-nous que pour l’instant, la notion avoir “autant d’éléments” n’a toujours pour les ensembles infinis aucune signification. Pour remédier à ce problème, nous pourrions nous baser sur ce dernier théorème et **décider** que nous dirons que deux ensembles (finis ou infinis) ont “autant d'éléments” si on peut trouver une application bijective de l'un vers l'autre. Autrement dit :

Définition I.2.2 Soient A et B, deux ensembles. On dit que A a *autant d'éléments* que B (ou ce qui est équivalent, que *la cardinalité de A est égale à la cardinalité de B*) ssi il existe une application bijective de A vers B.

Notation : en langage symbolique, la phrase :
“*la cardinalité de A est égale à la cardinalité de* B”, est noté : $|A| = |B|$

.

ou : $\#A = \#B$

et parfois : $\mathrm{CARD}(A) = \mathrm{CARD}(B)$.

2.2 Notre définition est-elle correcte ?

À la base, cette définition d'avoir “autant d'éléments” est un choix que nous faisons ici. On aurait pu retenir une autre définition qui, dans le cas fini, aurait coïncidé avec notre définition.

Donc, avant d'accepter cette nouvelle définition, il serait bon de nous demander si elle correspond bien à une notion élargie de la notion **d'égalité** entre le nombre d'éléments d'un ensemble et le nombre d'éléments d'un autre ensemble. Car une fois qu'on se l'est donnée, elle devient un axiome de notre théorie et on doit vivre avec et accepter tous les résultats que nous démontrerons à partir de cette définition, même si parfois ceci pourrait heurter l'intuition que nous avons de ce concept d'avoir “autant d'éléments”.

Concrètement, une bonne définition de cette notion “d'égalité” de cardinalités devrait posséder les trois grandes propriétés que toute notion équivalence doit posséder, c'est-à-dire :

- **la réflexivité** Est-ce qu'avec cette définition, un ensemble A a toujours la même cardinalité que lui-même ?

  Autrement dit, est-ce que pour tout ensemble A, on a $|A| = |A|$?

- **la symétrie** Avec cette définition, le fait qu'un ensemble A ait la même cardinalité qu'un ensemble B implique-t-il toujours que B a la même cardinalité que A ? Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, on a $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$?
- **la transitivité** Est-ce qu'avec cette définition, le fait qu'un ensemble A ait la même cardinalité qu'un ensemble B combiné au fait que ce B ait la même cardinalité qu'un troisième ensemble C implique toujours que A a la même cardinalité que C ? Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, C,
on a $(|A| = |B|) \wedge (|B| = |C|) \Rightarrow (|A| = |C|)$?

Il est à souhaiter que chacune de ces trois propriétés soit satisfaite par notre définition. Si ce n'était pas le cas, il ne serait vraiment pas naturel de parler "d'égalité" des cardinalités. Montrons donc que c'est le cas, pour les ensembles infinis comme pour les ensembles finis.

2.2.1 La réflexivité de notre relation "autant d'éléments"

Pour démontrer la réflexivité, il faut démontrer que pour tout ensemble A, il existe une application bijective de A vers A.

La réflexivité est donc une conséquence de la proposition suivante :

Proposition I.2.3 *Soit A un ensemble, la relation $\boldsymbol{I}_A$ est une application bijective.*

Démonstration Rappelons-nous que $\mathbf{I}_A : A \longrightarrow A$ est défini par la règle de correspondance $\mathbf{I}_A(x) = x$, $\forall x \in X$.

Le fait que $\mathbf{I}_A$ soit une application (c.-à-d. : totale et déterministe) découle directement du fait que la relation est définie par une règle de correspondance où pour chaque élément x de l'ensemble de départ, ne correspond qu'un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée, soit x lui-même.

Démontrons l'injectivité, c.-à-d. : $(\forall x, x' : A | \ \mathbf{I}_A(x) = \mathbf{I}_A(x') : x = x')$.
Soient $x, x' : A$, choisis tels que $\mathbf{I}_A(x) = \mathbf{I}_A(x')$.

Alors on a immédiatement $x = x'$. $\langle$ Car $\mathbf{I}_A(x) = x$ et $\mathbf{I}_A(x') = x'$. $\rangle$
$\mathbf{I}_A$ est bien une application injective.

Démontrons la surjectivité, c.-à-d. : $(\forall y : A| : (\exists x : A| : \mathbf{I}_A(x) = y))$.
Soit $y : A$.
Et soit $x := y$. $\langle$ Un tel x existe et appartient bien à A, car l'ensemble de départ coïncide avec l'ensemble d'arrivée. $\rangle$
Alors on a bien $\mathbf{I}_A(x) = y$.
$\mathbf{I}_A$ est bien une application surjective.

$\mathbf{I}_A$ est bien une application bijective.

C.Q.F.D.

2.2.2 La symétrie de notre relation "autant d'éléments"

Pour montrer la symétrie, il faut montrer que pour toute paire d'ensembles A et B : s'il existe une application bijective de A vers B, alors il existe une application bijective de B vers A.

La symétrie est une conséquence du théorème suivant :

Théorème I.2.4 *Soient A et B, deux ensembles, et $f \subseteq A \times B$. Alors, la relation f est une application bijective ssi la relation inverse $f^{-1} \subseteq B \times A$ est une application bijective.*

Démonstration
Rappelons que la relation inverse de la relation f est : $f^{-1} := \{\langle b, a\rangle | \ \langle a, b\rangle \in f\}$

Soit $f \subseteq A \times B$.
Pour démontrer f est une application bijective $\equiv f^{-1}$ est une application bijective, nous allons démontrer :

$$\begin{cases} 1.- & f \text{ est total} \equiv f^{-1} \text{ est surjectif}\,; \\ 2.- & f \text{ est déterministe} \equiv f^{-1} \text{ est injectif}\,; \\ 3.- & f \text{ est injectif} \equiv f^{-1} \text{ est déterministe}\,; \\ 4.- & f \text{ est surjectif} \equiv f^{-1} \text{ est total.} \end{cases}$$

Or, nous avons déjà fait cette démonstration. (Voir le théorème C.2 du fascicule *Théorie des relations : notes complémentaires et exemples de démonstrations de type "classique".*

C.Q.F.D.

2.2.3 La transitivité de notre relation "autant d'éléments"

Pour démontrer la transitivité,
il faut démontrer que pour tout triplet d'ensembles A, B et C :
s'il existe une application bijective de A vers B et une application bijective de B vers C, alors il existe une application bijective de A vers C.

La transitivité est une conséquence du théorème suivant :

Théorème I.2.5 *Soient A, B et C, trois ensembles, et soient $f \subseteq A \times B$ et $g \subseteq B \times C$. Si f et g sont deux applications bijectives, Alors $f \circ g$ sera une application bijective de A vers C.*

Démonstration Ce théorème est une conséquence directe de la définition d'application bijective et des lemmes C.4, C.5, C.6 et C.7 qui sont à la fin du fascicule "Théorie des relations : notes complémentaires et exemples de démonstrations de type classique".

C.Q.F.D.

2.3 "Autant" d'éléments que l'ensemble $\mathbb{N}$: les ensembles infinis dénombrables.

Parmi les ensembles infinis, une certaine classe est plus intéressante que les autres, c'est celle des ensembles *infinis dénombrables* :

Définition I.2.6 Un ensemble A est dit *dénombrable* s'il est fini ou de la même cardinalité que l'ensemble $\mathbb{N}$.

Établir une bijection f entre l'ensemble $\mathbb{N}$ et un ensemble A donne une énumération des éléments de A. On peut ainsi analyser A en regardant un à un les éléments de A en commençant par l'élément $f(0)$, puis en regardant l'élément $f(1)$, etc.
Pour cette raison, les ensembles infinis dénombrables auront sur plusieurs aspects un comportement très semblable à celui des ensembles finis. Très souvent, il sera facile de généraliser un théorème défini sur des structures finies aux structures infinies dénombrables, alors qu'une généralisation aux structures non dénombrables sera très difficile, voire impossible.

D'autre part, il est très souvent possible de définir en extension une application bijective dont le domaine est $\mathbb{N}$. Contrairement à la forme en compréhension qui nécessite l'élaboration d'une règle de correspondance, la forme en extension permet de montrer la dénombrabilité de certains ensembles d'une façon plus intuitive et visuelle. Une application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ qui est ainsi définie est souvent appelée une *énumération* de l'ensemble A puisqu'en somme définir une telle application consiste à énumérer un à un les différents éléments de l'ensemble d'arrivée ; $f(0)$ étant le $0^{\text{ième}}$ élément de cet énumération, $f(1)$ étant le 1^{er} élément de cet énumération, $f(2)$ étant le $2^{\text{ième}}$ élément de cet énumération, etc.

Exemple I.2.7 Démontrons la dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, en construisant l'application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, qui est définie en extension par :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \cdots & f(8) & f(6) & f(4) & f(2) & f(0) & f(1) & f(3) & f(5) & f(7) & \cdots \end{array}$$

C.Q.F.D.

Cette façon d'exhiber une application bijective est une peu moins rigoureuse que la forme en compréhension mais, comme l'illustre l'exemple ci-dessus, on comprend clairement comment f est définie, et on voit bien que

– si on nous donne le temps on sera capable de calculer $f(n)$ pour n'importe quel $n : \mathbb{N}$ (f est donc totale) ;
– on ne trouvera, pour chaque n, qu'une seule valeur pour $f(n)$ (f est donc déterministe) ;
– un élément de l'ensemble d'arrivée ne sera jamais utilisé deux fois dans l'énumération (f est donc injective) ;
– et finalement, on remarque, qu'éventuellement, tout élément de l'ensemble d'arrivée sera présent dans l'énumération (f est donc surjective).

Ainsi, une énumération qui a été bien définie, est toujours une application bijective.

Proposition I.2.8 *L'ensemble* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration Pour montrer la dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nous allons construire une application bijective $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, en la définissant en extension de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccc}
\langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,2\rangle & \langle 0,3\rangle & \langle 0,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots \\
{\scriptstyle k(0)} & {\scriptstyle k(2)} & {\scriptstyle k(5)} & {\scriptstyle k(9)} & {\scriptstyle k(14)} & \\[1em]
\langle 1,0\rangle & \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \langle 1,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots \\
{\scriptstyle k(1)} & {\scriptstyle k(4)} & {\scriptstyle k(8)} & {\scriptstyle k(13)} & {\scriptstyle k(19)} & \\[1em]
\langle 2,0\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle & \langle 2,3\rangle & \langle 2,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots \\
{\scriptstyle k(3)} & {\scriptstyle k(7)} & {\scriptstyle k(12)} & {\scriptstyle k(18)} & {\scriptstyle k(25)} & \\[1em]
\langle 3,0\rangle & \langle 3,1\rangle & \langle 3,2\rangle & \langle 3,3\rangle & \langle 3,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots \\
{\scriptstyle k(6)} & {\scriptstyle k(11)} & {\scriptstyle k(17)} & {\scriptstyle k(24)} & {\scriptstyle k(32)} & \\[1em]
\langle 4,0\rangle & \langle 4,1\rangle & \langle 4,2\rangle & \langle 4,3\rangle & \langle 4,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots \\
{\scriptstyle k(10)} & {\scriptstyle k(16)} & {\scriptstyle k(23)} & {\scriptstyle k(31)} & {\scriptstyle k(40)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

On a donc que $\Big|\mathbb{N}\Big| = \Big|\mathbb{N} \times \mathbb{N}\Big|$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est donc un ensemble dénombrable.

C.Q.F.D.

Remarquons qu'étant donné que la relation "avoir autant d'éléments" est transitive (voir 2.2.3), si nous avons déjà démontré la dénombrabilité d'un ensemble A, nous pouvons alors démontrer la dénombrabilité d'un nouvel ensemble B en utilisant le lemme suivant :

Lemme I.2.9 *Étant donné un ensemble infini B.*
Alors, B est dénombrable $\equiv (\exists A : \textit{ensemble} \mid A \textit{ est infini dénombrable } : |A| = |B|)$.

3 “Avoir plus d’éléments”

La notion “d’avoir autant d’éléments” nous a jusqu’ici permis d’explorer un peu l’univers des ensembles infinis, mais notre exploration serait certainement meilleure si on pouvait raffiner cette notion “d’égalité” entre les cardinalités en une notion “d’inégalité”. Avec une telle notion, on pourrait, comme dans le cas fini, bâtir une hiérarchie des cardinalités d’ensembles infinis.

3.1 À la recherche d’une définition

Lorsque nous avons eu à nous choisir une définition “d’égalité” de cardinalités, nous avons eu principalement à tenir compte de deux critères. Il fallait que notre définition (1) coïncide dans le cas fini avec la définition déjà existante et (2) ne nécessite aucunement notre habileté à compter les éléments d’un ensemble fini. Dans le cas présent, nous sommes également confrontés à ces deux mêmes critères avec, en plus, le besoin que cette nouvelle notion “d’inégalité” des cardinalités soit compatible avec la notion “d’égalité” des cardinalités qu’on vient de se donner. Ceci implique que, pour définir la notion de “la cardinalité de A *est plus petite ou égale à* la cardinalité de B”, on a essentiellement deux possibilités : soit on dit que c’est équivalent au fait qu’il existe une application injective de A vers B, soit on dit que c’est équivalent au fait qu’il existe une application surjective de B vers A.

Dans le cas fini, ces deux définitions seraient équivalentes car la première signifie que A a autant ou moins d’éléments que B et la seconde que B a autant ou plus d’éléments que A. Mais comme le montre le théorème suivant, ces deux définitions sont également équivalentes en général :

Théorème I.3.1 *Soient A et B, deux ensembles non vides. Alors,*
$\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *ssi* $\exists$ *application surjective* $g : B \longrightarrow A$.

Démonstration

$\Rightarrow$: Supposons qu’il existe une application injective de A vers B et démontrons qu’il existe une application surjective de B vers A.

Soit $f : A \longrightarrow B$, une application injective.

Soit $a_0 \in A$. $\langle$ Un tel a_0 existe car A est un ensemble non vide par hypothèse. $\rangle$

Soit $g = \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\} \cup \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima}.f\}$

Montrons que g est une application surjective.

- $g \subseteq B \times A$ **est total.** C'est-à-dire $(\forall b : B \mid : (\exists a : A \mid : bga))$.

  Soit $b : B$. Alors, il y a deux cas à considérer :

  Cas 1 : $b \in \text{Ima}.f$.

  Soit $a : A$ choisis tel que $f(a) = b$ $\langle$ Un tel a existe – définition de Ima.f. $\rangle$

  Alors on a bien que $\langle f(a), a\rangle \in g$

  c'est-à-dire que $\langle b, a\rangle \in g$

  Cas 2 : $b \notin \text{Ima}.f$.

  Soit $a = a_0$. $\langle$ Bien sûr, un tel a existe et est dans A $\rangle$

  Et on a bien que $\langle b, a_0\rangle \in g$ $\langle$ Définition de g.$\rangle$

  Donc g est total.

- $g \subseteq B \times A$ **est déterministe**. C'est-à-dire $(\forall b : B, a, a' : A \mid bga \wedge bga' : a = a')$.

  Soient $b : B$ et a, $a' : A$ choisis tels que $bga \wedge bga'$.

  Ici aussi, il y a deux cas à considérer :

  Cas 1 : $b \in \text{Ima}.f$. Alors, comme on a bga, on a donc $\langle b, a\rangle \in \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\}$.

  Ce qui implique que $b = f(a)$.

  D'autre part, comme on a bga', on a donc $\langle b, a'\rangle \in \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\}$.

  Ce qui implique que $b = f(a')$.

  Par la transitivité de $=$, de $b = f(a)$ et $b = f(a')$, on obtient que $f(a) = f(a')$.

  Ce qui implique que $a = a'$. $\langle$ Car f est injectif.$\rangle$

  Cas 2 : $b \notin \text{Ima}.f$.

  Alors, comme on a bga, on a donc $\langle b, a\rangle \in \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima}.f\}$.

et $\langle b, a' \rangle \in \{\langle b, a_0 \rangle | b \notin \text{Ima}.f\}$.

Ce qui implique que $a = a_0$ et $a' = a_0$.

On a donc que $a = a'$. $\langle$ Transitivité de $=.\rangle$

g est donc déterministe.

g est donc une application de B vers A.

- $g : B \longrightarrow A$ **est surjectif.** C'est-à-dire $(\forall a : A \,|: (\exists b : B \,|: bga))$.

  Soit $a : A$.

  Soit $b := f(a)$. $\langle$ Un tel b existe et appartient à B, car f est total.$\rangle$

  Et on a bien bga. $\langle$ Définition de g dans le cas où $b \in \text{Ima}.f$. $\rangle$

$\Leftarrow$: Supposons qu'il existe une application surjective de B vers A et démontrons qu'il existe une application injective de A vers B.

Soit $g : B \longrightarrow A$, une application surjective.

Nous avons donc que

pour tout $a : A$, il existe un $b : B$ tel que $g(b) = a$. $\langle$ Car g est surjectif. $\rangle$

Pour **chacun** des $a : A$, nous allons choisir un tel $b : B$ que nous noterons b_a.

Alors on a que pour tout $a : A$, $(\star)$ $g(b_a) = a$ et que $(\star\star)$ $b_a : B$.

Soit $f : A \longrightarrow B$ défini par la règle de correspondance $f(a) = b_a$.

Alors, clairement cette application est bien définie, car $(\star)$ et $(\star\star)$ impliquent que pour tout $a : A$, il existe un et un seul élément qui est en f-relation avec a, c'est b_a. Et ce b_a appartient bien à B, l'ensemble d'arrivée de f. La relation f est donc bien total et déterministe.

Il ne reste qu'à démontrer que f est injectif, c'est-à-dire que $(\forall a, a' : A \mid f(a) = f(a') : a = a')$.

Soient $a, a' : A$ choisis tel que $f(a) = f(a')$.

Alors on a que $b_a = b_{a'}$. $\langle$ Définition de f. $\rangle$

Et donc que $g(b_a) = g(b_{a'})$. $\langle$ Car g est une application. $\rangle$

Et donc que $a = a'$. $\langle$ Voir ($\star$). $\rangle$

f est bien une application injective.

C.Q.F.D.

Nous pouvons donc maintenant définir notre notion de “cardinalité plus petite ou égale à” :

Définition I.3.2 Soient A et B, deux ensembles.
On dit que A a *une cardinalité plus petite ou égale à* la cardinalité de B

ssi il existe une application injective de A vers B.

Ou, ce qui est équivalent,

ssi il existe une application surjective de B vers A.

On notera la phrase “A a une cardinalité plus petite ou égale à la cardinalité de B” par $|A| \leq |B|$.

3.2 Notre définition est-elle correcte ?

D'une façon similaire à ce que nous avons fait à la section 2.2, avant de l'accepter, nous allons nous demander si notre notion de $\leq$ se comporte vraiment comme une relation d'ordre. Autrement dit :

- **la réflexivité.** Est-ce qu'avec cette définition, un ensemble A a toujours une cardinalité plus petite ou égale à elle-même ?
  Autrement dit est que pour tout ensemble A, on a $|A| \leq |A|$?

- **l'antisymétrie.** Est-ce qu'avec cette définition, le fait qu'un ensemble A ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d'un ensemble B combiné avec le fait que B ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d'un ensemble A implique toujours que B a la même cardinalité que A ?
  Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, on a $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |B| = |A|$?
- **la transitivité.** Est-ce qu'avec cette définition, le fait qu'un ensemble A ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d'un ensemble B combiné au fait que ce B ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d'un troisième ensemble C implique toujours que A a une cardinalité plus petite ou égale à celle de C ?
  Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, C, on a
  $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$?
- **cet ordre est-il compatible avec la relation "sous-ensemble".** Si un ensemble A est inclus dans un ensemble B, avons nous toujours que la cardinalité de A est plus petite ou égale à celle de B ?
  Autrement dit, est-ce que pour tout A, B,
  on a $(|A| \subseteq |B|) \Rightarrow (|A| \leq |B|)$?

- **cet ordre est-il partiel ou total.** Est-ce qu'avec cette définition, étant donné n'importe quel paire d'ensembles A et B, on a toujours ou bien que A a une cardinalité plus petite que celle de B, ou bien que A a une cardinalité plus grande que celle de B, ou bien que A a une cardinalité égale à celle de B ?
  Autrement dit,
  est-ce que pour tout A, B, on a $(|A| < |B|) \vee (|A| > |B|) \vee (|A| = |B|)$?

Il est à souhaiter que chacune de ces quatre premières propriétés soit satisfaites par notre définition. Si tel n'était pas le cas, il ne serait vraiment pas naturel de parler d'une relation du type "plus petit ou égal" sur les cardinalités. Il serait également souhaitable que la cinquième propriété soit satisfaite. Montrons donc que tel est le cas, pour les ensembles infinis comme pour les ensembles finis.

3.2.1 La réflexivité de notre relation "cardinalité $\leq$"

Cette propriété est clairement vérifiée puisque, comme on l'a vu à la section 2.2.1, pour tout ensemble A il existe toujours une application bijective de A vers A. Cette application étant par conséquent injective, nous avons bien que pour tout ensemble A, $|A| \leq |A|$.

3.2.2 L'antisymétrie de notre relation "cardinalité $\leq$"

Cette propriété découle du théorème suivant :

Théorème I.3.3 (Bernstein-Schröder) *Soient A et B, deux ensembles.*
S'il existe une application injective de A vers B et une application injective de B vers A, alors il existera une application bijective de A vers B.
Autrement dit : $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$.

Démonstration *Nous ne ferons pas cette démonstration dans le cadre de ce cours.*

3.2.3 La transitivité de notre relation "cardinalité $\leq$"

Pour démontrer la transitivité, il faut montrer que pour tout triplet d'ensembles A, B et C :
s'il existe une application injective de A vers B et une application injective de B vers C, alors il existe une application injective de A vers C.

La transitivité est une conséquence du théorème suivant :

Théorème I.3.4 *Soient A, B et C, trois ensembles, et*
soient $f \subseteq A \times B$ et $g \subseteq B \times C$. Si f et g sont deux applications injectives, alors $f \circ g$ sera une application injective de A vers C.

Démonstration $\langle$ À venir. $\rangle$

3.2.4 La relation "cardinalité $\leq$"est-elle compatible avec $\subseteq$?

Le fait que pour toute paire d'ensembles A, B, on ait $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$, est une conséquence directe de la proposition suivante :

Proposition I.3.5 *Soient A et B deux ensembles.*
Si $A \subseteq B$ alors l'application $I_{A\subseteq B} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a \end{array}$ *est bien définie et est injective.*

Démonstration Exercice.

3.2.5 Notre relation "cardinalité $\leq$" est-elle un ordre total ?

En fait on ne peut répondre à cette question puisqu'il a été démontré qu'à partir des axiomes que nous avons vus jusqu'à maintenant, il est tout à fait **impossible de démontrer que :**

pour tout paire d'ensembles A et B, on ait $(|A| < |B|) \vee (|A| > |B|) \vee (|A| = |B|)$.

Pour arriver à démontrer ce fait, il faut donc introduire un nouvel axiome, *l'axiome du choix* qui, en gros, dit que si vous avez une quantité infinie d'ensembles non vides devant vous et que vous souhaitez choisir un élément dans chacun de ces ensembles, vous pouvez supposer que vous savez le faire en une seule étape, même si dans les faits vous ne pourrez jamais faire cette opération puisqu'elle nécessite une infinité d'étapes.
Plus formellement :

Axiome du choix I.3.6 Soit $(A_i)_{i\in I}$, une famille infinie d'ensembles non vides. Alors il existe une famille d'éléments $(a_i)_{i\in I}$ telle que pour chaque $i : I$, $a_i \in A_i$.

Nous n'utiliserons pas explicitement cet axiome dans les démonstrations et problèmes de ce cours. Notez cependant que nous en avons déjà fait une utilisation implicite dans la partie ($\Leftarrow$:) de la démonstration du théorème I.3.1 et que nous en ferons également une utilisation implicite dans la démonstration du théorème I.3.7.

3.3 $|\mathbb{N}|$ est la plus petite cardinalité infinie

Intuitivement, on ne voit pas comment un ensemble infini pourrait avoir une cardinalité plus petite que $|\mathbb{N}|$. Cette intuition est effectivement juste, en voici la démonstration.

Théorème I.3.7 *Soit A un ensemble infini. Alors $|A| \geq |\mathbb{N}|$.*

Démonstration

Soit A un ensemble infini. Alors, nous devons démontrer que $|A| \geq |\mathbb{N}|$ et pour ce faire, nous allons montrer qu'il existe une application injective de $\mathbb{N}$ vers A.

Construisons l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ récursivement de la façon suivante :

Soit $a_0 \in A$. $\langle$ Un tel a_0 existe car l'ensemble infini A est non vide. $\rangle$

Définissons $f(0) = a_0$.

Soit $a_1 \in A - \{a_0\}$. $\langle$ Un tel a_1 existe car l'ensemble infini A contient plus d'un élément. $\rangle$

Définissons $f(1) = a_1$.

Soit $a_2 \in A - \{a_0, a_1\}$. $\langle$ Un tel a_2 existe car l'ensemble infini A contient plus de deux éléments. $\rangle$

Définissons $f(2) = a_2$.

Soit $a_3 \in A - \{a_0, a_1, a_2\}$. $\langle$ Un tel a_3 existe car l'ensemble infini A contient plus de trois éléments. $\rangle$

Définissons $f(3) = a_3$.

Continuant cette construction, ad infinitum, on aura défini $f(n)$, $\forall n : \mathbb{N}$.

Comme $\forall n : \mathbb{N}$, n est en relation f avec **un** et **un seul** élément de A (soit l'élément a_n), f est bien une application de $\mathbb{N}$ vers A.

Il ne reste qu'à démontrer que f est injective. C'est-à-dire que $(\forall n, n' : \mathbb{N} \mid n \neq n' : f(n) \neq f(n'))$

Soient n, $n' : \mathbb{N}$ choisis tels que $n \neq n'$.
Et comme $\mathbb{N}$ est totalement ordonné, sans perte de généralité, supposons que $n < n'$.
Et de $n < n'$, on déduit que $a_n \in \{a_0, a_1, \ldots, a_{n'-1}\}$.
Ce qui implique que $a_n \neq a_{n'}$. $\langle$ Car par construction, $a_{n'} \in A - \{a_0, a_1, \ldots, a_{n'-1}\}$. $\rangle$

Comme en plus on a $a_n = f(n)$ et $a_{n'} = f(n')$. ⟨ Voir définition de f. ⟩
On a donc que $f(n) \neq f(n')$.

f est donc une application injective.

C.Q.F.D.

3.4 Donnons-nous des outils

Dans cette section, nous allons énoncer plusieurs résultats qui pourront être utiles lorsque viendra le temps de démontrer si deux ensembles ont la même cardinalité ou si un des deux a une cardinalité plus petite que l'autre.

Les deux premiers résultats sont des conséquences directes des définitions de "même cardinalité" et "cardinalité plus petite ou égale" et des théorèmes I.2.4, I.3.1 et I.3.3, de l'axiome du choix (Axiome I.3.6) et de la remarque de la section 3.2.5.

Théorème I.3.8 *Soient A et B, deux ensembles, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $|A| = |B|$.
2. $\exists$ *application bijective* $f : A \longrightarrow B$.
3. $\exists$ *application bijective* $g : B \longrightarrow A$.
4. $|A| \leq |B|$ *et* $|A| \geq |B|$.
5. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *et* $\exists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.
6. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *et* $\exists$ *application surjective* $h : A \longrightarrow B$.
7. $\exists$ *application surjective* $k : B \longrightarrow A$ *et* $\exists$ *application surjective* $h : A \longrightarrow B$.
8. $\exists$ *application surjective* $k : B \longrightarrow A$ *et* $\exists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.

Théorème I.3.9 *Soient A et B, deux ensembles, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $|A| < |B|$.
2. $|A| \leq |B|$ *et* $|A| \neq |B|$.
3. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *mais* $\nexists$ *application bijective* $g : B \longrightarrow A$.
4. $|A| \leq |B|$ *et* $|A| \ngeq |B|$.
5. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *mais* $\nexists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.
6. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *mais* $\nexists$ *application surjective* $g : A \longrightarrow B$.
7. $|A| \ngeq |B|$.
8. $\nexists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.
9. $\nexists$ *application surjective* $g : A \longrightarrow B$.

Les deux résultats suivants portent sur la notion de dénombrabilité. Ils découlent essentiellement des théorèmes I.3.8 et I.3.9 et du fait que $|\mathbb{N}|$ est "la plus petite cardinalité infinie" (le théorème I.3.7).

Théorème I.3.10 *Soit A un ensemble. Alors les résultats suivants sont équivalents :*

1. *A est dénombrable.*
2. $|A| \leq |\mathbb{N}|$
3. *$\exists$ application surjective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*
4. *$\exists$ application injective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
5. $|A| < |\mathbb{N}|$ *ou* $|A| = |\mathbb{N}|$
6. *A est fini ou $\exists$ application bijective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
7. *A est fini ou $\exists$ application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*

Théorème I.3.11 *Soit A un ensemble. Alors les résultats suivants sont équivalents :*

1. *A est non dénombrable[2].*
2. $|A| > |\mathbb{N}|$.
3. *$\nexists$ application surjective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*
4. *$\nexists$ application injective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
5. *A est infini et $|A| \neq |\mathbb{N}|$.*
6. *A est infini et $\nexists$ application bijective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
7. *A est infini et $\nexists$ application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*

[2]Dans la prochaine section, nous verrons qu'il existe des ensembles qui sont non dénombrables.

Théorème I.3.12 *Soient A et B, deux ensembles dénombrables (finis ou infinis). Alors*

1. *$A \cup B$ est dénombrable,*
2. *$A \times B$ est dénombrable.*

Démonstration

Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$, deux applications surjectives ⟨ De tels f et g existent, voir Théorème I.3.10. ⟩

Démontrons que $A \cup B$ est dénombrable.

$$\text{Soit} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \cup B \\ n & \longmapsto & \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ est pair} \\ g(\frac{n-1}{2}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

L'application h est bien définie, car chaque $n : \mathbb{N}$ est en h-relation avec **un** et **un seul** élément de $A \cup B$ qui est **ou bien** $f(\frac{n}{2}) \in A$, si n est pair, **ou bien** $g(\frac{n-1}{2}) \in B$ si n est impair.

Donc, pour démontrer que $A \cup B$ est dénombrable, il suffit de montrer que h est surjectif.
⟨Voir Théorème I.3.10.⟩
Montrons donc que $(\forall y : A \cup B \mid: (\exists n : \mathbb{N} \mid: h(n) = y))$.
Soit $y : A \cup B$.
Il y a deux cas (non nécessairement mutuellement exclusifs) à considérer.

Cas 1 : $y \in A$
Soit $i : \mathbb{N}$ choisi tel que $f(i) = y$.
⟨Un tel i existe car $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ est surjectif.⟩
Soit $n := 2i$.
⟨Un tel n existe et appartient à $\mathbb{N}$.⟩
Alors, on a bien
$h(n) = h(2i) = f(\frac{2i}{2}) = f(i) = y$.

Cas 2 : $y \in B$
Soit $j : \mathbb{N}$ choisi tel que $g(j) = y$.
⟨Un tel j existe car $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ est surjectif.⟩
Soit $n := 2j + 1$.
⟨Un tel n existe et appartient à $\mathbb{N}$.⟩
Alors, on a bien
$h(n) = h(2j+1) = g(\frac{(2j+1)-1}{2}) = g(j) = y$.

Dans chacun des deux cas on a bien qu'il existe un $n : \mathbb{N}$ tel que $h(n) = y$. h est donc une application surjective. $A \cup B$ est donc dénombrable.

Démontrons que $A \times B$ est dénombrable.

Nous avons démontré à la proposition I.2.8 que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Par le théorème I.3.10, il est donc suffisant de montrer que $|A \times B| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Pour démontrer la dénombrabilité de $A \times B$, il suffit donc de montrer qu'il existe une application surjective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $A \times B$.

Soit l'application H suivante :

$$\begin{array}{rcccc} H & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & A\times B \\ & & {\scriptstyle \langle i,j\rangle} & {\scriptstyle \longmapsto} & {\scriptstyle \langle f(i),g(j)\rangle} \end{array}$$

On note que H est bien définie (c'est-à-dire, elle est bien une relation totale et déterministe), car pour tout couple $\langle i, j\rangle : \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\quad H(\langle i, j\rangle) = \langle f(i), g(j)\rangle$ est bien un élément de $A \times B$ puisque $f(i)$ est bien un élément de A et $g(j)$ est bien un élément de B.
Il existe donc pour chaque couple $\langle i, j\rangle : \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, **un** et **un seul** élément de $A \times B$ qui est en H-relation avec $\langle i, j\rangle$.
H est bien une application.

Démontrons que H est surjectif.
Il faut démontrer que $\Big(\forall\langle\alpha, \beta\rangle : A \times B \mid : \Big(\exists\langle i, j\rangle : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid : H(\langle i, j\rangle) = \langle\alpha, \beta\rangle\Big)\Big)$.

Soit $\langle\alpha, \beta\rangle : A \times B$.

Soit $i : \mathbb{N}$ choisi tel que $f(i) = \alpha$ $\quad\langle$ Un tel i existe car $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ est une application surjective et $\alpha \in A$. $\rangle$
Soit $j : \mathbb{N}$ choisi tel que $g(j) = \beta$ $\quad\langle$ Un tel j existe car $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$ est une application surjective et $\beta \in B$. $\rangle$

Alors, on a bien que $\langle i, j\rangle : \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et que $H(\langle i, j\rangle) = \langle\alpha, \beta\rangle$.

H est donc surjectif.

On a donc que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| \geq |A \times B|$.

Par le théorème I.3.10–($2 \Rightarrow 1$), $A \times B$ est donc un ensemble dénombrable.

C.Q.F.D.

3.5 "plus d'éléments" que $\mathbb{N}$: les ensembles non dénombrables

En terminant ce chapitre, nous allons essayer de trouver des ensembles infinis non dénombrables. À première vue, on aurait pu croire que tous les ensembles étaient dénombrables puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable et même $\mathbb{Q}$ l'est. Cependant, nous allons voir que $\mathbb{R}$, lui, ne l'est pas. Nous verrons même comment on peut fabriquer des ensembles de cardinalité toujours plus grande.

Le prochain théorème est dû à Cantor, le père de cette théorie.

Théorème I.3.13 (Cantor) *Pour tout ensemble A,* $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Démonstration (par contradiction)

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble A tel que $|A| \geq |\mathcal{P}(A)|$. Et cherchons une contradiction.

Soit donc A un tel ensemble.
Soit $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, une application surjective. $\langle$ Une telle application existe, voir Théorème I.3.2. $\rangle$
Soit $T := \{a : A \mid a \notin f(a)\}$.
Remarquons que $T \subseteq A$ et donc que $T \in \mathcal{P}(A)$.
Soit $a_0 : A$, choisi tel que $f(a_0) = T$ $\langle$ Une tel a_0 existe car f est surjectif. $\rangle$

Alors il y a deux cas à considérer.
Cas 1 : $a_0 \in T$.
Alors $a_0 \notin f(a_0)$. $\langle$ Définition de T. $\rangle$
Ce qui implique que $a_0 \notin T$. $\langle$ Car $f(a_0) = T$. $\rangle$
Dans ce premier cas on a donc à la fois que $a_0 \in T$ et que $a_0 \notin T$,
ce qui est une **contradiction**.

Cas 2 : $a_0 \notin T$.
Alors $\neg(a_0 \notin f(a_0))$. $\langle$ Définition de T. $\rangle$
Ce qui implique que $(a_0 \in f(a_0))$. $\langle$ Définition de $\notin$ et **(3.15)–Double négation** $\neg\neg p \equiv p$. $\rangle$
Ce qui implique que $a_0 \in T$. $\langle$ Car $f(a_0) = T$. $\rangle$
Dans ce deuxième et dernier cas on a aussi à la fois que $a_0 \in T$ et que $a_0 \notin T$,
ce qui est donc ici aussi une **contradiction**.

Le fait que nous obtenons une contradiction dans chacun des deux cas, nous permet de conclure qu'on ne pouvait pas supposer le contraire.
Si on ne peut supposer le contraire de l'énoncé $\Big(\forall A : \text{Ensemble} \mid : |A| < |\mathcal{P}(A)|\Big)$, c'est qu'il est vrai.

C.Q.F.D.

Définition I.3.14 Étant donnés deux ensembles A et B, on définit B^A comme étant l'ensemble de **toutes** les applications de A vers B.

Autrement dit : $B^A = \{f : A \longrightarrow B \mid \}$.

Proposition I.3.15 *Pour tout ensemble A, on a* $\Big|\mathcal{P}(A)\Big| = \Big|\{0,1\}^A\Big|$.

Démonstration Soit l'application G suivante :

$$\begin{array}{cccc} G & : & \{0,1\}^A & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ & & {\scriptstyle f:A\longrightarrow\{0,1\}} & \longmapsto & {\scriptstyle \{a:A \mid f(a)=1\}} \end{array}$$

On note que G est bien définie (c'est-à-dire, elle est bien une relation totale et déterministe), car pour toute application $f \in \{0,1\}^A$, $\;G(f) = \{a : A \mid f(a) = 1\}$ est bien un élément de $\mathcal{P}(A)$ puisque c'est un sous-ensemble de A.
Il existe donc pour chaque application $f \in \operatorname{Dom} G$, **un** et **un seul** élément de $\mathcal{P}(A)$ qui est en G-relation avec f. G est donc une application.

Démontrons que G est injectif et surjectif.

Injectivité. Il faut démontrer que $\Big(\forall f_1, f_2 \in \{0,1\}^A \mid f_1 \neq f_2 : G(f_1) \neq G(f_2)\Big)$.

Soit $f_1, f_2 \in \{0,1\}^A$, choisis tels que $f_1 \neq f_2$.
Soit $x \in A$ choisi tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$. $\langle$ Un tel x existe car $f_1 \neq f_2$. $\rangle$

Comme l'ensemble d'arrivée de f_1 et celui de f_2 sont tous deux égaux à $\{0,1\}$, **sans perte de généralités** nous pouvons supposer que $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 1$.

Ce qui implique que $x \notin \{a : A \mid f_1(a) = 1\}$ et que $x \in \{a : A \mid f_2(a) = 1\}$.
On a donc $x \notin G(f_1)$ et $x \in G(f_2)$.
Ce qui implique $G(f_1) \neq G(f_2)$. $\langle$ Car $G(f_1)$ et $G(f_2)$ sont deux ensembles et ils n'ont pas exactement les mêmes éléments. $\rangle$

G est donc injectif.

Surjectivité Il faut démontrer que $(\forall B : \mathcal{P}(A) \mid: (\exists f_B \in \{0,1\}^A \mid: G(f_B) = B))$.

Soit $B : \mathcal{P}(A)$. $\langle$ Notons que $B \subseteq A$. $\rangle$

$$\text{Soit}\quad \begin{array}{llll} f_B : & A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & a & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin B. \\ 1 & \text{si } a \in B. \end{cases} \end{array}$$

L'application f_B est bien définie car pour chaque élément a, ou bien $a \in B$ ou bien $a \notin B$.
Ce qui ici implique que a est en f_B-relation avec **un** et **un seul** élément de $\{0,1\}$.
f_B est donc bien une application (c.-à-d. : totale et déterministe).

De plus,

$$
\begin{array}{lll}
G(f_B) & & \\
\quad = & \{a : A \mid f_B(a) = 1\} & \langle \text{ Définition de } G. \rangle \\
\quad = & \{a : A \mid a \in B\} & \langle \text{ Définition de } f_B. \rangle \\
\quad = & B. & \langle \text{ Car } B \subseteq A. \rangle
\end{array}
$$

G est donc surjectif.

G est donc une application bijective de $\{0,1\}^A$ vers $\mathcal{P}(A)$.
Ce qui implique que $\left|\{0,1\}^A\right| = \left|\mathcal{P}(A)\right|$.

C.Q.F.D.

Corollaire I.3.16 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *est un ensemble non dénombrable.*

Le résultat précédent se généralise au résultat suivant :

Théorème I.3.17 *Soient A un ensemble ayant au moins deux éléments et B un ensemble infini.*
Alors A^B est un ensemble non dénombrable.

Nous ne ferons pas la démonstration du théorème I.3.17, mais nous allons illustrer l'essentiel des idées qui lui sont rattachées en solutionnant l'exemple suivant :

Exemple I.3.18 Démontrons que $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

Solution 1 : Remarquons que toute application qui est **élément de** $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (*l'ensemble de toutes les applications dont le domaine est* $\mathbb{N}$ *et l'image est inclus dans* $\{0,1\}$) peut aussi être interprété comme un **élément de** $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ (*l'ensemble de toutes les applications dont le domaine est* $\mathbb{N}$ *et l'image est inclus dans* $\{0,1,2\}$).

Autrement dit, il y a une application injective "canonique" de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.

Ce qui implique que $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\right|$.

Comme en plus on a démontré au cours que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable, ⟨ Voir Théorème 3.16 et 3.14. ⟩
nous avons donc que $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ est également non dénombrable.

$\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ vers $\{0,1,2\}$ est donc non dénombrable.

C.Q.F.D.

Solution 2 : la solution la plus rigoureuse. Nous allons montrer que $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\right|$ en construisant explicitement une application injective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, et comme on sait par le corollaire I.3.16 que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable, nous aurons alors montré que $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ est également non dénombrable.

Pour démontrer $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\right|$, nous allons construire une application injective H de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccc} H & : & \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \\ & & \left(\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & n & \longmapsto & f(n) \end{array}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{cccc} H(f) & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0,1,2\} \\ & & n & \longmapsto & f(n) \end{array}\right) \end{array}$$

*Autrement dit, étant donné une application f de $\mathbb{N}$ vers $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $H(f)$ est l'application de $\mathbb{N}$ vers $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ qui a **la même règle de correspondance** que f.*

On note que H est bien définie (c'est-à-dire, elle est bien une relation totale et déterministe), car il existe pour chaque application $f \in \operatorname{Dom} H$, **un** et **un seul** élément de $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ qui est en H-relation avec f.

H est donc une application, il ne reste donc qu'à démontrer qu'elle est injective.

Il faut donc démontrer que $\left(\forall f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid f_1 \neq f_2 : H(f_1) \neq H(f_2)\right)$.

Soit $f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, choisis tels que $f_1 \neq f_2$.
Soit $x \in \mathbb{N}$ choisi tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$. ⟨ Un tel x existe car $f_1 \neq f_2$. ⟩
Alors $H(f_1)(x) = f_1(x)$ ⟨ Par la définition de H. ⟩
Et $H(f_2)(x) = f_2(x)$ ⟨ Par la définition de H. ⟩
On a donc $H(f_1)(x) \neq H(f_2)(x)$ ⟨ Puisque $f_1(x) \neq f_2(x)$. ⟩
On a donc $H(f_1) \neq H(f_2)$

C.Q.F.D.

Avant d'énoncer le prochain théorème, nous devons faire un rappel sur les nombres réels.

Rappel I.3.19
La représentation base 10 d'un nombre réel est de la forme

$$b_n\, b_{n-1} \ldots b_1\, b_0,\ \ a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$$

où les b_j et les a_i sont des chiffres de 0 à 9.

Exemple : $\frac{8}{3} = 2,\, 666\ldots$

Cependant, cette représentation n'est pas unique.
En effet, le nombre $0,\, 213$ par exemple peut être représenté par $0,\, 213000\ldots$ et par $0,\, 212999\ldots$

Pour éviter toute ambiguïté, nous allons supposer ici que nous ne représenterons jamais un nombre réel par une représentation base 10 qui se terminerait par une séquence infinie de 9.

En particulier, **chacun** des nombres de l'intervalle $[0, 1[$ aura une **unique** représentation base 10 de la forme $0,\ a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots$, où chacun des a_i est un chiffre de 0 à 9 et qui ne se termine pas par une séquence infinie de 9.

Histoire de bien comprendre ce problème de la non unicité de la représentation en base 10, voici la démonstration que $0,\, 9999\ldots = 1$ *et la démonstration que* $0,\, 212999\ldots = 0,\, 213000\ldots$ *:*

Démontrons que $0,\, 9999\ldots = 1$**.**

Posons $x := 0,\, 9999\ldots$.

Alors on a
$$\begin{array}{rcr} 10\,x & = & 9,\, 9999\ldots \\ -\,x & = & -\,0,\, 9999\ldots \\ \hline 9\,x & = & 9 \end{array}$$

Ce qui implique bien que $x = 1$.

C.Q.F.D.

Démontrons que $0,\, 212999\ldots = 0,\, 213000\ldots$ **.**

Posons $y := 0,\, 212999\ldots$.

Alors on a
$$\begin{array}{rcr} 10\,000\,y & = & 2129,\, 9999\ldots \\ -\,1\,000\,y & = & -\ \ 212,\, 9999\ldots \\ \hline 9000\,y & = & 1917 \end{array}$$

Ce qui implique que $y = \frac{1917}{9000}$.

Et on vérifie facilement que $\frac{1917}{9000} = 0,\, 213$

C.Q.F.D.

Théorème I.3.20 $\mathbb{R}$ *est non dénombrable.*

Démonstration

Étape 1 : Nous allons démontrer que l'intervalle $]0,1]$ est non dénombrable.

Preuve par contradiction.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $|\mathbb{N}| \geq |]0,1]|$. ⟨ *Et cherchons une contradiction.*⟩

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow]0,1]$, une application surjective. ⟨ Un tel f existe car $\left|\mathbb{N}\right| \geq \left|]0,1]\right|$. ⟩

Nous allons maintenant représenter f en extension, en représentant en base 10 chacun des $f(n)$.

Soient $(a_i^n)_{n,i\in\mathbb{N}}$, une famille de chiffres de 0 à 9, choisis tels que :

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 0,\ a_0^0\, a_1^0\, a_2^0\, a_3^0\, a_4^0\, a_5^0 \ldots \\
f(1) & = & 0,\ a_0^1\, a_1^1\, a_2^1\, a_3^1\, a_4^1\, a_5^1 \ldots \\
f(2) & = & 0,\ a_0^2\, a_1^2\, a_2^2\, a_3^2\, a_4^2\, a_5^2 \ldots \\
f(3) & = & 0,\ a_0^3\, a_1^3\, a_2^3\, a_3^3\, a_4^3\, a_5^3 \ldots \\
f(4) & = & 0,\ a_0^4\, a_1^4\, a_2^4\, a_3^4\, a_4^4\, a_5^4 \ldots \\
\vdots & \vdots & \qquad\quad \vdots
\end{array}$$

Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une famille de chiffres choisis tel que pour chaque $i : \mathbb{N}$: $b_i = \begin{cases} 4 & \text{si } a_i^i \neq 4 \\ 5 & \text{si } a_i^i = 4 \end{cases}$

Soit maintenant $b := 0,\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots$.

Clairement, b est un nombre de l'intervalle $]0,1]$, représenté en base 10 par une famille de chiffres qui ne se termine pas par une séquence infinie de 9.

Soit $n : \mathbb{N}$ choisi tel que $f(n) = b$. ⟨ Un tel n existe car f est surjectif. ⟩

Alors on a que $0,\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots = 0,\ a_0^n\, a_1^n\, a_2^n\, a_3^n\, a_4^n\, a_5^n \ldots$. ⟨ Car **notre** représentation base 10 est unique. (Voir le Rappel.) ⟩

En particulier on doit avoir que $b_n = a_n^n$, ce qui en **contradiction** avec la définition de $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Ainsi, on ne peut pas supposer que $]0,1]$ est dénombrable, c'est donc que $]0,1]$ n'est pas dénombrable.

Étape 2 : Nous allons maintenant démontrer que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Comme $]0,1] \subseteq \mathbb{R}$, on a donc que par la proposition I.3.5, que $I_{]0,1]\subseteq\mathbb{R}} :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application injective.

Ce qui implique que $|\mathbb{R}| \geq |]0,1]|$.

Ce qui, combiné avec l'étape 1, implique que $|\mathbb{R}| \geq |]0,1]| > |\mathbb{N}|$.

$\mathbb{R}$ est donc non dénombrable.

C.Q.F.D.