MAT-22257

Supplément sur la théorie des graphes

1 Graphes-plan et graphes planaires

Définition G.1 Un *graphe-plan* est une représentation dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'un graphe non-orienté planaire. Autrement dit, un graphe-plan G est une paire (V(G), E(G)) telle que

1. $V(G) \subseteq \mathbb{R}^2$;
2. $\forall e \in E(G) \quad e$ est une portion de courbe de $\mathbb{R}^2$ entre deux sommets $u, v \in V(G)$;
3. il existe au plus une arête entre deux sommets donnés ;
4. l'intérieur d'une arête ne contient pas de sommets et n'intersecte aucune autre arête.

Donc, comme pour tout graphe non-orienté :
- $V(G)$ représente l'ensemble des *sommets* de G ;
- $E(G)$ représente l'ensemble des *arêtes* de G

Cependant, dans le cas spécifique des graphe-plan :
- $F(G)$ représente l'ensemble des *régions* de G ;

Lemme G.2 *Soit G un graphe-plan et $e \in E(G)$.*
(i) Si e appartient à un cycle C de G alors e est dans la frontière d'exactement deux faces de G.
(ii) Si e n'est dans aucun cycle de G alors e est dans la frontière d'exactement une face de G.

(Sans démonstration mais exemple donné en classe)

Théorème G.3 ***(Formule d'Euler)***
Soit G un graphe-plan connexe. Alors

$$\Big|V(G)\Big| + \Big|F(G)\Big| - \Big|E(G)\Big| = 2.$$

Démonstration
Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe un graphe-plan qui ne satisafait pas la formule d'Euler.
Parmi tous les graph-plan G qui ne satisfont pas la formule d'Euler, choisissons-en un qui contienne le plus petit nombre possible d'arêtes. Notons ce graphe G_0.

Nous avons donc :

$$\Big|V(G_0)\Big| + \Big|F(G_0)\Big| - \Big|E(G_0)\Big| \neq 2 \tag{1}$$

Mais pour tout graphe-plan connexe H

$$\text{si } \Big|E(H)\Big| < \Big|E(G_0)\Big| \quad \text{alors on a} \quad \Big|V(H)\Big| + \Big|F(H)\Big| - \Big|E(H)\Big| = 2. \tag{2}$$

Alors, il y a deux cas à considérer :

Cas 1 : G_0 contient un cycle C.
Soit $e \in E(C)$.
Alors par le lemme G.2 (i), l'arête e est la frontière d'exactement deux régions.
Soit le graphe $H := G_0 \backslash e$. ⟨ *C'est à dire, le sous-graphe obtenu de G_0 qui a exactement les mêmes sommets que G_0 et toutes les arêtes de G_0 sauf l'arête e.* ⟩

On a donc

(i) $\Big|E(H)\Big| = \Big|E(G_0)\Big| - 1$

(ii) $\Big|V(H)\Big| = \Big|V(G_0)\Big|$

(iii) $\Big|F(H)\Big| = \Big|F(G_0)\Big| - 1$ ⟨ *car les deux régions séparées par e dans G_0 n'en forment plus qu'une dans H.* ⟩

Notons que puisque G_0 est connexe, H est lui aussi connexe car si il existe entre deux sommets un chemin de G_0 qui passe par l'arête e, alors (en faisant un détour par les arêtes de $C\backslash e$) il existe entre ces deux mêmes sommets, un chemin de G_0 qui ne passe pas par e et qui donc est également un chemin de H.
Donc H est un graphe-plan connexe ; il découle donc de l'item (i) et de l'équation (2) que H satisfait la formule d'Euler.
Donc,

$$\begin{aligned}
2 &= \Big|V(H)\Big| + \Big|F(H)\Big| - \Big|E(H)\Big| \\
&= \Big|V(G_0)\Big| + \Big(\Big|F(G_0)\Big| - 1\Big) - \Big(\Big|E(G_0)\Big| - 1\Big) && \langle \textit{Voir (i), (ii) et (iii).} \rangle \\
&= \Big|V(G_0)\Big| + \Big|F(G_0)\Big| - \Big|E(G_0)\Big| && \langle \textit{Propriétés de l'arithmétique.} \rangle
\end{aligned}$$

On a donc à la fois que G_0 satisfait et ne satisafait pas la formule d'Euler. Ceci est une contradiction.

Cas 2 : G_0 ne contient pas de cycle.
Comme G_0 est connexe, G_0 est donc un arbre.

Donc $\left|F(G_0)\right| = 1$, *⟨ Car un graphe-plan qui est un arbre n'a qu'un région, la région extérieure.⟩*

De plus, par le théorème (11.8), on sait que $\left|V(G_0)\right| = \left|E(G_0)\right| + 1.$
Ce qui implique que

$$\left|V(G_0)\right| - \left|E(G_0)\right| = 1$$

On a donc que

$$\left|V(G_0)\right| + \left|F(G_0)\right| - \left|E(G_0)\right| \; = \; 1 + 1 \; = \; 2$$

Ainsi, dans ce 2$^{\text{ème}}$ cas, nous avons également que G_0 satisfait et ne satisafait pas la formule d'Euler.
Encore une fois, donc, nous obtenons une contradiction.

C.Q.F.D.

Proposition G.4 *Soit G un graphe-plan connexe tel que $\left|V(G)\right| \geq 4$, alors*

$$\left|E(G)\right| \; \leq \; 3\left|V(G)\right| \; - \; 6.$$

.

Démonstration Soit G un graphe-plan connexe tel que $\left|V(G)\right| \geq 4$.
Voici deux observations :

1. Comme G est connexe et a au moins 4 sommets, chaque régions de G a au moins 3 arêtes.
   ⟨ Les seuls exceptions étant les graphes $\bullet$, $\bullet\!-\!\bullet$ et $\bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet$ qui ont tous moins de 4 sommets.⟩
2. Chaque arête de G est contenue dans au plus 2 régions de G *⟨ Voir le lemme G.2.⟩*

Notons par $f_1, f_2, \ldots, f_{|F(G)|}$ les régions de G
et par m_i, le nombre d'arêtes contenues dans la région f_i $\quad i \in \{1, 2, \ldots, |F(G)|\}$.

Alors, il découle des deux observations que

$$3\left|F(G)\right| \; \leq \; m_1 + m_2 + \cdots + m_{|F(G)|} \; \leq \; 2\left|E(G)\right|$$

Ce qui implique que

$$\left|F(G)\right| \; \leq \; \frac{2}{3}\left|E(G)\right| \tag{3}$$

Par la formule d'Euler, on sait que $2 = \left|V(G)\right| + \left|F(G)\right| - \left|E(G)\right|$.

En combinant avec l'équation (3), on obtient

$$2 \leq \left|V(G)\right| \; + \; \frac{2}{3}\left|E(G)\right| \; - \; \left|E(G)\right|$$

C'est-à-dire

$$2 \leq \left|V(G)\right| \; - \; \frac{1}{3}\left|E(G)\right|$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{3}\left|E(G)\right| \; \leq \; \left|V(G)\right| \; - \; 2$$

C'est-à-dire

$$\left|E(G)\right| \; \leq \; 3\left|V(G)\right| \; - \; 6$$

C.Q.F.D.

Proposition G.5 *Tout graphe planaire a un sommet de degré ≤ 5.*

Démonstration
Supposons le contraire.
Soit G un graphe planaire de degré minimum ≥ 6.
Notons par d_{Max} le degré maximum de G
et par n_i le nombre de sommets de degré i pour $i = 6, 7, \ldots, d_{Max}$.

Alors on a

$$\left|E(G)\right| \; = \; \frac{1}{2}\left(6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \cdots + d_{Max}n_{d_{Max}}\right) \tag{4}$$

Par la proposition G.4, on sait que $\left|E(G)\right| \; \leq \; 3\left|V(G)\right| - 6$.

En combinant avec l'équation (4), on obtient

$$\frac{1}{2}\left(6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \cdots + d_{Max}n_{d_{Max}}\right) \; \leq \; 3\left(n_6 + n_7 + n_8 + \cdots + n_{d_{Max}}\right) \; - \; 6$$

C'est-à-dire

$$\left(6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \cdots + d_{Max}n_{d_{Max}}\right) \; \leq \; 6\left(n_6 + n_7 + n_8 + \cdots + n_{d_{Max}}\right) \; - \; 12$$

C'est-à-dire

$$n_7 + 2n_8 + \cdots + (d_{Max} - 6)n_{d_{Max}} \; \leq \; -12 \tag{5}$$

Notons que $n_7 + 2n_8 + \cdots + (d_{Max} - 6)n_{d_{Max}} \geq 0$
$\langle$*Car c'est le résultat de sommes et de produits de nombres positifs ou nuls.*$\rangle$

L'équation (5) nous donne donc qu'un nombre ≥ 0 est plus petit ou égale à -12,
ce qui est une contradiction.

C.Q.F.D.