Définitions 1:(*cette définition vient remplacer la définitions d'injectivité de la page 120 des notes dans le cas où la relation étudiée est une **application**.*)

Étant donnée une application $f : B \longrightarrow C$, alors

$$f \text{ est injective } \equiv (\forall b, b' : B | f(b) = f(b') : b = b')$$

ou, ce qui est équivalent:

$$f \text{ est injective } \equiv (\forall b, b' : B | b \neq b' : f(b) \neq f(b')))$$

Définitions 2:(*cette définition vient remplacer la définitions de surjectivité de la page 120 des notes dans le cas où la relation étudiée est une **application**.*)

Étant donnée une application $f : B \longrightarrow C$, alors

$$f \text{ est surjective } \equiv (\forall c : C | : (\exists b : B | : f(b) = c))$$

Théorie des ensembles infinis

(I.2.2) Ax. déf.: égalité de cardinalités

$|A| = |B|$ ssi il existe une application bijective de A vers B.

(I.2.3) Appl. identité *La relation $\boldsymbol{I}_A$ est une application bijective,* $\forall A$:Ensemble.

(I.2.4) Bijectivité et inverse *Soient A et B, deux ensembles, et $f \subseteq A \times B$. Alors, la relation f est une application bijective ssi la relation inverse $f^{-1} \subseteq B \times A$ est une application bijective.*

(I.2.5) Bijectivité et composition *Soient A, B et C, trois ensembles, et soient $f \subseteq A \times B$ et $g \subseteq B \times C$.*
Si f et g sont deux applications bijectives, Alors $f \circ g$ sera une application bijective de A vers C.

(I.2.6) Ax. déf.: dénombrable Un ensemble A est dit *dénombrable* s'il est fini ou de la même cardinalité que l'ensemble $\mathbb{N}$.

(I.2.9) Transitivité de dénombrabilité *Étant donné un ensemble infini B. Alors,*

$$B \text{ est dénombrable} \equiv (\exists A : \text{ensemble} \mid A \text{ est infini dénombrable } : |A| = |B|).$$

(I.3.1) Dualité *Soient A et B, deux ensembles non-vides. Alors,*

$$\exists \text{ appl. injective } f : A \longrightarrow B \text{ ssi } \exists \text{ appl. surjective } g : B \longrightarrow A.$$

(I.3.2) Ax. déf.: cardinalité $\leq$ Soient A et B, deux ensembles.

$|A| \leq |B|$ ssi il existe une application injective de A vers B.

Ou, ce qui est équivalent

$|A| \leq |B|$ ssi il existe une application surjective de B vers A.

(I.3.3) Bernstein-Schröder *Soient A et B, deux ensembles. S'il existe une application injective de A vers B et une application injective de B vers A, alors il existera une application bijective de A vers B.*

Autrement dit : $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$.

(I.3.4) Injectivité et composition *Soient A, B et C, trois ensembles, et soient $f \subseteq A \times B$ et $g \subseteq B \times C$. Si f et g sont deux applications injectives, alors $f \circ g$ sera une application injective de A vers C.*

Autrement dit : $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$.

(I.3.5) $\leq$ et inclusion *Soient A et B deux ensembles.*
Si $A \subseteq B$ *alors l'application* $I_{A \subseteq B} : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a \end{array}$ *est bien définie et est injective.*

Ce qui entraîne : $|A| \subseteq |B| \Rightarrow |A| \leq |B|$.

(I.3.7) Minimalité de $|\mathbb{N}|$ *Soit A un ensemble infini. Alors $|A| \geq |\mathbb{N}|$.*

(I.3.8) Équivalence à = de cardinalité *Soient A et B, deux ensembles, alors les énoncés suivants sont équivalents:*

1. $|A| = |B|$.
2. $\exists$ *application bijective* $f : A \longrightarrow B$.
3. $\exists$ *application bijective* $g : B \longrightarrow A$.
4. $|A| \leq |B|$ *et* $|A| \geq |B|$.
5. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ et $\exists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.
6. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *et* $\exists$ *application surjective* $h : A \longrightarrow B$.
7. $\exists$ *application surjective* $k : B \longrightarrow A$ *et* $\exists$ *application surjective* $h : A \longrightarrow B$.
8. $\exists$ *application surjective* $k : B \longrightarrow A$ *et* $\exists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.

(I.3.9) Équivalence à < des cardinalités

Soient A et B, deux ensembles, alors les énoncés suivants sont équivalents:

1. $|A| < |B|$.
2. $|A| \leq |B|$ *et* $|A| \neq |B|$.
3. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *mais* $\nexists$ *application bijective* $g : B \longrightarrow A$.
4. $|A| \leq |B|$ *et* $|A| \ngeq |B|$.
5. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *mais* $\nexists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.
6. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *mais* $\nexists$ *application surjective* $g : A \longrightarrow B$.
7. $|A| \ngeq |B|$.
8. $\nexists$ *application injective* $g : B \longrightarrow A$.
9. $\nexists$ *application surjective* $g : A \longrightarrow B$.

(I.3.10) Équiv. à dénombrable *Les énoncés suivants sont équivalents $\forall$ensemble A*

1. *A est dénombrable.*
2. $|A| \leq |\mathbb{N}|$.
3. $\exists$ *application surjective* $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.
4. $\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.
5. $|A| < |\mathbb{N}|$ ou $|A| = |\mathbb{N}|$.
6. *A est fini ou* $\exists$ *application bijective* $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.
7. *A est fini ou* $\exists$ *application bijective* $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

(I.3.11) Équiv. à non dénombrable *Les énoncés suivants sont équiv. $\forall$ensemble A*

1. *A est non dénombrable .*
2. $|A| > |\mathbb{N}|$.
3. $\nexists$ *application surjective* $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.
4. $\nexists$ *application injective* $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.
5. *A est infini et* $|A| \neq |\mathbb{N}|$.
6. *A est infini et* $\nexists$ *application bijective* $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.
7. *A est infini et* $\nexists$ *application bijective* $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

(I.3.12) Union et produit *Soient A et B, deux ensembles infinis dénombrables. Alors*

1. *$A \cup B$ est dénombrable,*
2. *$A \times B$ est dénombrable.*

(I.3.13) Cantor *Pour tout ensemble A,* $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

(I.3.14) Ax.déf.: ensemble d'applications Étant donnés deux ensembles A et B, on définit B^A comme étant l'ensemble de **toutes** les applications de A vers B.

Autrement dit: $B^A = \{f : A \longrightarrow B \mid \}$

(I.3.15) Ens. de sous-ensembles et ens. d'applications

Pour tout ensemble A, on a $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A|$.

(I.3.17) La non dénombrabilité des ensembles d'applications

Soient A un ensemble ayant au moins deux éléments et B un ensemble infini. Alors A^B est non dénombrable.

(I.3.20) Ens. des nombres réels $\mathbb{R}$ *est non-dénombrable.*

Résolutions de récurrences

(R.1.1) Principe d'induction mathématique faible.

Étant donné un prédicat P. Alors,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} | : P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} | : P(n))$

ou, ce qui est équivalent,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid P(n) : P(n+1))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} | : P(n))$

ou, ce qui est équivalent,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N}^* \mid P(n-1) \Rightarrow P(n))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} | : P(n))$

ou, ce qui est équivalent,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N}^* \mid P(n-1) : P(n))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} | : P(n))$

(R.1.3) Principe d'induction mathématique faible sur $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$.

Étant donné un prédicat P. Alors,

$(P(n_0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid n_0 < n \wedge P(n-1) : P(n))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} \mid n_0 \leq n : P(n))$

(R.1.4) Principe d'induction mathématique à deux cas de base.

Étant donné un prédicat P. Alors,

$(P(0) \wedge P(1) \wedge (\forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \mid P(n-2) \wedge P(n-1) : P(n))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} | : P(n))$

(R.2.1) Définition de "*suite arithmétique*".

On dit qu'une suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est *arithmétique* de *premier terme a* et de *différence d* si

- $a_0 = a$
- la différence entre la valeur de a_n et celle de a_{n-1} est égale à d $\forall n : \mathbb{N}^*$

(R.2.2) Théorème sur les suites arithmétiques.

Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, une suite. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

1. $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique de premier terme a et de différence d.*
2. $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *est définie par récurrence par*
$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$
3. $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *est définie par terme général par:*
$$a_n = a + nd \quad \forall n : \mathbb{N}$$

(R.2.4) Définition de "*suite géométrique*".

On dit qu'une suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* de *premier terme* a et de *raison* r si

- $a_0 = a$
- le rapport[1] de la valeur de a_n sur la valeur de a_{n-1} est égale à $r \quad \forall n : \mathbb{N}^*$

(R.2.5) Théorème sur les suites géométrique.

Soit $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, une suite. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

1. *$\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme a et de raison r.*
2. *$\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par*
$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = a_{n-1}\cdot r \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$
3. *$\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général par:*
$$a_n = a\cdot r^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

[1]Le rapport de a_n sur a_{n-1} est le résultat de la division de a_n par a_{n-1}, c.-à-d: $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(R.2.7) Déf. de "*suite des sommes de premiers termes d'une suite*".

Soit $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle *suite des sommes de premiers termes* de la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\langle a_0, (a_0+a_1), (a_0+a_1+a_2), \ldots, (a_0+a_1+\cdots+a_n), \ldots\rangle$

Autrement dit, $\langle S_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par $\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1}+a_n \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

(R.2.8) Suite des sommes de premiers termes d'une suite arithmétique".

Soit $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme a et de différence d et soit $\langle S_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes de premiers termes de la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Alors,

$\langle S_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général[2] par: $\quad S_n = \frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2} \quad \forall n : \mathbb{N}$

(R.2.10) Suite des sommes de premiers termes d'une suite géométrique".

Soit $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de premier terme a et de raison r et soit $\langle S_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes de premiers termes de la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Alors,

$\langle S_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général[3] par: $\quad S_n = \frac{a\cdot(1-r^{n+1})}{1-r} \quad \forall n : \mathbb{N}$

[2]Remarquons que "$(n+1)$" représente le nombre de termes de la somme qui donne S_n, "a_0" le premier terme de cette somme et "a_n" le dernier terme.
[3]Remarquons que "$(n+1)$" représente ici aussi le nombre de terme de la somme qui donne S_n.

La méthode de résolution de récurrence par séries génératrices

Étape 1: À partir de la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, construire la *série génératrice*
$$G(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots + a_n\,x^n + \cdots$$
Puis en se servant astucieusement de la relation de récurrence définissant $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, on exprime G sous la forme d'une fonction rationnelle

Étape 2: On décompose la fonction rationnelle trouvé à l'étape 1 en éléments plus simples de façon à ce que pour chacun de ces éléments, on connaisse la série de puissance qui lui est associée. Cette étape s'appelle la *décomposition en fractions partielles.*

Étape 3: On recompose les différentes séries de puissances associées aux fonctions rationnelles trouvées à l'étape 2, de façon à obtenir la série de puissances associée à G, obtenant ainsi indirectement le terme général de la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, résolvant ainsi la récurrence.

(R.3.2) Modèles de séries de puissances.

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}-\{0\}$, alors $\forall x \in]\frac{-1}{|b|}, \frac{1}{|b|}[$, on a que

- $\frac{a}{1-bx} = a + a\,b\cdot x + a\,b^2\cdot x^2 + a\,b^3\cdot x^3 + a\,b^4\cdot x^4 + \cdots + a\,b^n\cdot x^n + \cdots$
- $\frac{a}{(1-bx)^2} = a + 2a\,b\cdot x + 3a\,b^2\cdot x^2 + 4a\,b^3\cdot x^3 + \cdots + (n+1)a\,b^n\cdot x^n + \cdots$
- $\frac{ax}{(1-bx)^2} = 0 + a\cdot x + 2a\,b\cdot x^2 + 3a\,b^2\cdot x^3 + 4a\,b^3\cdot x^4 + \cdots + (\mathrm{n})\,a\,b^{n-1}\cdot x^n + \cdots$
- $\frac{a}{(1-bx)^3} = \frac{2\cdot1\cdot a}{2} + \frac{3\cdot2\cdot a\cdot b}{2}x + \frac{4\cdot3\cdot a\cdot b^2}{2}x^2 + \frac{5\cdot4\cdot a\cdot b^3}{2}x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1)\cdot a\cdot b^n}{2}x^n + \cdots$

(R.3.3) Modèles de séries de puissances — Cas particuliers.

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$
- $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-1)x + (-1)^2x^2 + (-1)^3x^3 + (-1)^4x^4 + \cdots + (-1)^nx^n + \cdots$
- $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)\,x^n + \cdots$
- $\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + (\mathrm{n})\,x^n + \cdots$
- $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{2\cdot1}{2} + \frac{3\cdot2}{2}x + \frac{4\cdot3}{2}x^2 + \frac{5\cdot4}{2}x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \cdots$

(R.3.4) Décomposer une fonction rationnelle en fractions partielles

Voici la forme de décomposition en fractions partielles de chacune des familles de fonctions rationnelles suivantes:

- $\frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f}$
  Pourvu que $y = cx+d$ et $y = ex+f$ aient des zéros différents.
- $\frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{(cx+d)^2}$
- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)(fx+g)(hx+i)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{fx+g} + \frac{C}{hx+i}$
  Pourvu que $y = dx+e$, $y = fx+g$ et $hx+i$ aient des zéros tous différents.
- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^2(fx+g)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{fx+g}$
  Pourvu que $y = dx+e$ et $y = fx+g$ aient des zéros différents.
- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^3} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{(dx+e)^3}$

(R.3.7) Rappel sur les polynôme de degré 2

Soit $p(x) = ax^2+bx+c$, un polynôme de degré deux.
Soient $\rho_1 := \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $\rho_2 := \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Alors,

- *ρ_1 et ρ_2 sont appelés les **zéros** du polynôme p car* $\begin{cases} p(\rho_1) = 0 \quad et \quad p(\rho_2) = 0, \\ mais \quad p(x) \neq 0 \quad \forall\ x \neq \rho_1, \rho_2. \end{cases}$
- *Le polynôme p se factorise toujours ainsi:* $\quad p(x) = a(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.
- *De plus, si le polynôme est unitaire (c'est-à-dire si $a = 1$), on a toujours que*
$$\begin{cases} (*) \quad \rho_1+\rho_2 = -b \\ (**) \quad \rho_1\cdot\rho_2 = c. \end{cases}$$

(R.3.8) Cas particulier de factorisation.

Soit $p(x) = x^2-rx-s$, un polynôme de degré deux.
Et soient ρ_1 et ρ_2 les deux zéros (non nécessairement distincts) du polynôme p.
Alors le polynôme $q(x) = 1-rx-sx^2$ se factorise ainsi:
$$1-rx-sx^2 = (1-\rho_1x)(1-\rho_2x)\,.$$

(R.4.1) Définition de "relation linéaire, homogène d'ordre k.

Une relation de récurrence est dite *linéaire, homogène d'ordre k* si la formule permettant de calculer $n^{\text{ème}}$ terme de la suite est une combinaison linéaire des k termes précédents.

(R.4.5) Récurrences linéaires, homogènes d'ordre 2.

Soit $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie récursivement par:
$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_1 = b \\ a_n = r\cdot a_{n-1}+s\cdot a_{n-2} \quad \forall n : \mathbb{N}-\{0,1\} \end{cases}$$
où a, b, r et s sont des constantes réelles.

Soit p, le polynôme caractéristique de la suite $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, (c.-à-d.: $p(x) = x^2-rx-s$).

Et soient ρ_1 et ρ_2 les zéros de ce polynôme.

Alors, le terme général de la suite est
$$a_n \begin{cases} = A\cdot(\rho_1)^n + B\cdot(\rho_2)^n \quad n : \mathbb{N} & si\ \rho_1 \neq \rho_2. \\ = A\cdot(\rho_1)^n + B\cdot n\cdot(\rho_1)^n \quad n : \mathbb{N} & si\ \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$
Où A et B sont deux constantes déterminées par les conditions initiales de la récurrence.

(11.1) *La somme des degrés des sommets d'un graphe $\langle S, A\rangle$ est $2\cdot\#A$.*

(11.2) *Dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.*

(11.4) Théorème : *Pour tout graphe planaire connexe avec s sommets, a arêtes et r régions, $r = a-s+2$.*

(11.5) Théorème : *Entre deux sommets quelconques d'un arbre, il y a un chemin simple unique.*

(11.6) Théorème : *Un arbre avec au moins deux sommets a au moins deux sommets de degré 1.*

(11.7) Théorème : *Pour tout arbre $\langle S, A\rangle$, $\#S = 1+\#A$.*

(11.8) Théorème : *Soit $G = \langle S, A\rangle$ un graphe non orienté sans boucle.*
Alors, les énoncés suivants sont équivalents :
(a) *G est un arbre.*
(b) *G est connexe et l'enlèvement d'une arête quelconque produit deux arbres.*
(c) *G n'a pas de cycle et $\#S = 1+\#A$.*
(d) *G est connexe et $\#S = 1+\#A$.*
(e) *G n'a pas de cycle et l'ajout d'une arête introduit exactement un cycle.*