Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
MAT-22257

Danny Dubé
Hiver 2009
Version: 10 avril

Corrigé de l'examen intra
du 11 mars 2009

1. **Preuves formelles**. 20 points. Prouvez formellement les théorèmes suivants. Rappel: dans chaque preuve, vous ne pouvez utiliser que les propriétés qui précèdent celle que vous essayer de prouver.

a) **(11.54)** $S \subseteq T \;\equiv\; S \cap T = S$

$$
\begin{array}{ll}
 & S \subseteq T \\
= & \quad \langle\ \textbf{(11.21) Axiome, sous-ensemble}\ \rangle \\
 & (\forall x \mid x \in S : x \in T) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(7.4)}\text{(b)}\ \textbf{Axiome, transfert}\ \rangle \\
 & (\forall x \mid: x \in S \wedge x \in T \equiv x \in S) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(11.29) Axiome, intersection}\ \rangle \\
 & (\forall x \mid: x \in S \cap T \equiv x \in S) \\
= & \quad \langle\ \textbf{(11.8) Axiome, extensionnalité}\ \rangle \\
 & S \cap T = S
\end{array}
$$

---

b) **(11.71)** $S \subseteq T \;\equiv\; S \subset T \vee S = T$
Indice: soit S est égal à T, soit il ne l'est pas.

$$
\begin{array}{ll}
 & S \subseteq T \\
= & \quad \langle \textbf{ (3.52) Identité de } \wedge \rangle \\
 & S \subseteq T \wedge \mathsf{vrai} \\
= & \quad \langle \textbf{ (3.37) Axiome, tiers exclus } \rangle \\
 & S \subseteq T \wedge (S \neq T \vee S = T) \\
= & \quad \langle \textbf{ (3.60) Distributivité de } \wedge \textbf{ sur } \vee \rangle \\
 & (S \subseteq T \wedge S \neq T) \vee (S \subseteq T \wedge S = T) \\
= & \quad \langle \textbf{ (11.22) Axiome, sous-ensemble propre } \rangle \\
 & S \subset T \vee (S \subseteq T \wedge S = T) \\
= & \quad \langle \textbf{ (11.65) Antisymétrie } \rangle \\
 & S \subset T \vee (S \subseteq T \wedge S \subseteq T \wedge T \subseteq S) \\
= & \quad \langle \textbf{ (3.51) Idempotence de } \wedge \rangle \\
 & S \subset T \vee (S \subseteq T \wedge T \subseteq S) \\
= & \quad \langle \textbf{ (11.65) Antisymétrie } \rangle \\
 & S \subset T \vee S = T
\end{array}
$$

---

2. **Preuves classiques**. 15 points. Démontrez de manière classique le théorème
(11.52) Monotonie de $\cap$ **:** $S \subseteq T \wedge U \subseteq V \;\Rightarrow\; S \cap U \subseteq T \cap V$.

Autrement dit, nous devons démontrer: $(\forall\, S, T, U, V | : S \subseteq T \wedge U \subseteq V \;\Rightarrow\; S \cap U \subseteq T \cap V)$.
$\langle$ Méta-théorème **(7.23)** $\rangle$

Soient S, T, U et V des ensembles tels que $S \subseteq T$ et $U \subseteq V$.

Il reste à démontrer que $S \cap U \subseteq T \cap V$.

Autrement dit, il reste à démontrer que $(\forall x \mid x \in S \cap U : x \in T \cap V)$. $\langle$ **(11.21)** $\rangle$

Soit $x \in S \cap U$.

Il reste à montrer que $x \in T \cap V$.

On a que $x \in S$ et $x \in U$. $\langle$ **(11.29)** $\rangle$

On a donc que $x \in T$ et $x \in V$. $\langle$ Car $S \subseteq T$ et $U \subseteq V$ $\rangle$

On a donc que $x \in T \cap V$. $\langle$ **(11.29)** $\rangle$
C.Q.F.D.

3. **Propriétés des relations**. 15 points. Soit $S = \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$. Sans justifier, indiquez si la relation $\rho \subseteq S \times S$ possède les propriétés suivantes.

$$\rho = \{\langle\spadesuit,\spadesuit\rangle, \langle\spadesuit,\clubsuit\rangle, \langle\clubsuit,\clubsuit\rangle, \langle\heartsuit,\spadesuit\rangle, \langle\heartsuit,\clubsuit\rangle, \langle\heartsuit,\heartsuit\rangle\}$$

a) réflexivité OUI

b) irréflexivité NON

c) symétrie NON

d) antisymétrie OUI

e) asymétrie NON

f) transitivité OUI

g) relation d'équivalence NON

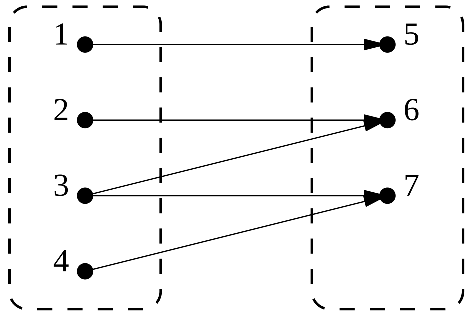
h) ordre partiel OUI

i) ordre partiel strict NON

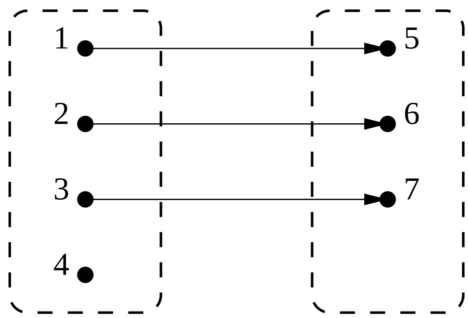
j) ordre total OUI

4. **Propriétés des relations**. 10 points. Soient $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et $T = \{5, 6, 7\}$. Donnez, sans justification, une relation sur $S \times T$ qui est:

a) totale et surjective mais pas déterministe ni injective



b) déterministe, injective et surjective mais pas totale



5. **Ensembles et ensembles infinis**. 40 points. Indiquez, avec $<$, $=$ ou $>$, comment se comparent les cardinalités des deux ensembles. Justifiez ensuite votre réponse.

a) $S = \{i : \mathbb{N} \mid \mathsf{pair}(i)\}$ et $\mathbb{Z}$

Réponse: $|S| = |\mathbb{Z}|$.

Justification:

Soit $f : \mathbb{N} \to S$ l'application bijective définie par extension par:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & \end{array}$$

Nous avons donc que $|\mathbb{N}| = |S|$, selon le théorème **I.3.8**.

En classe, dans l'exemple **I.2.7**, nous avons démontré que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Par transitivité de l'égalité des cardinalités, nous avons donc que $|S| = |\mathbb{Z}|$.

C.Q.F.D.

b) $S = \{x : \mathbb{R} \mid 5x^2 - 7x - 8 = 0\}$ et $\mathbb{Q}$

Réponse: $|S| < |\mathbb{Q}|$.

Justification:

L'ensemble S contient au plus deux éléments car un polynôme du deuxième degré possède au plus 2 zéros. Donc, S est fini.

Or, on sait que $\mathbb{Q}$ est infini.

C.Q.F.D.

c) $\mathbb{R}$ et l'ensemble S qui contient chacune des formules arithmétiques f, telle que f est une formule écrite avec un nombre fini de caractères dans

$$\{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{+}, \texttt{-}, \texttt{*}, \texttt{/}, \texttt{(}, \texttt{)}\},$$

qui est bien formée (syntaxiquement) et dont le résultat, une fois évaluée, est 18

Réponse: $|\mathbb{R}| > |S|$.

Justification:

Soit T l'ensemble de tous les mots finis formés des caractères dans

$$\{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{+}, \texttt{-}, \texttt{*}, \texttt{/}, \texttt{(}, \texttt{)}\}.$$

Comme $S \subseteq T$, alors $|S| \leq |T|$, à cause de la compatibilité de "cardinalité $\leq$" avec $\subseteq$ (section **3.2.4** des notes sur les ensembles infinis).

Comme, pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$, il n'existe qu'un nombre fini de mots de longueur n, on peut énumérer tous les mots dans T, à l'aide de l'application bijective $f : \mathbb{N} \to T$, ce qui suffit à démontrer que $|T| = |\mathbb{N}|$:

$$\begin{array}{lccccc}
 & \epsilon \text{ (le mot vide)} & & & & \\
\text{Longueur 0:} & \uparrow & & & & \\
 & f(0) & & & & \\
 & & & & & \\
 & \texttt{0} & \texttt{1} & & \texttt{(} & \texttt{)} \\
\text{Longueur 1:} & \uparrow & \uparrow & \ldots & \uparrow & \uparrow \\
 & f(1) & f(2) & & f(15) & f(16) \\
 & & & & & \\
 & \texttt{00} & \texttt{01} & \texttt{02} & \texttt{03} & \\
\text{Longueur 2:} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \ldots \\
 & f(17) & f(18) & f(19) & f(20) & \\
 & & & & & \\
\ldots & \ldots & & & &
\end{array}$$

On a donc que $|S| \leq |T| = |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, car $\mathbb{R}$ est non dénombrable (**I.3.20**).

C.Q.F.D.

d) $[0,1]$ et $S = [1,2] \cup [3,4] \cup [5,8] \cup [9,11]$

Réponse: $|[0,1]| = |S|$.

Justification:

Soit $f : [0,1] \to S$, définie par la règle de correspondance $f(x) = x+1$. L'application f est injective car strictement croissante.

Soit $g : S \to [0,1]$, définie par la règle de correspondance $g(x) = x/11$. L'application g est aussi injective car strictement croissante.

Par le théorème **I.3.8**, clause 5, on a donc que $|[0,1]| = |S|$.

C.Q.F.D.