

Examen intra 11 mars 2009

Nom de l'étudiant(e) (facultatif): _____

Matricule: _____

Programme d'études: _____

Directives pédagogiques:

- Aucune documentation permise
- Ordinateurs et autres appareils électroniques interdits
- Répondre sur le questionnaire
- Le verso des feuilles du questionnaire ne sera pas lu à moins que vous n'y référiez explicitement
- À moins de spécifications contraires, vous devez toujours justifier vos réponses
- Vous pouvez donner des définitions en extension d'une application (injective, surjective ou bijective) dont le domaine est \mathbb{N} et, dans ce cas, vous n'avez pas à démontrer qu'il s'agit d'une application (injective, surjective ou bijective, respectivement)

1. **Preuves formelles.** 20 points. Prouvez formellement les théorèmes suivants. Rappel: dans chaque preuve, vous ne pouvez utiliser que les propriétés qui précèdent celle que vous essayer de prouver.

a) **(11.54)** $S \subseteq T \equiv S \cap T = S$

b) **(11.71)** $S \subseteq T \equiv S \subset T \vee S = T$

Indice: soit S est égal à T , soit il ne l'est pas.

2. **Preuves classiques.** 15 points. Démontrez de manière classique le théorème
(11.52) **Monotonie de \cap :** $S \subseteq T \wedge U \subseteq V \Rightarrow S \cap U \subseteq T \cap V$.

3. **Propriétés des relations.** 15 points. Soit $S = \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$. Sans justifier, indiquez si la relation $\rho \subseteq S \times S$ possède les propriétés suivantes.

$$\rho = \{\langle \spadesuit, \spadesuit \rangle, \langle \spadesuit, \clubsuit \rangle, \langle \clubsuit, \clubsuit \rangle, \langle \heartsuit, \spadesuit \rangle, \langle \heartsuit, \clubsuit \rangle, \langle \heartsuit, \heartsuit \rangle\}$$

- a) réflexivité
- b) irreflexivité
- c) symétrie
- d) antisymétrie
- e) asymétrie
- f) transitivité
- g) relation d'équivalence
- h) ordre partiel
- i) ordre partiel strict
- j) ordre total

4. **Propriétés des relations.** 10 points. Soient $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et $T = \{5, 6, 7\}$. Donnez, sans justification, une relation sur $S \times T$ qui est:

- a) totale et surjective mais pas déterministe ni injective
- b) déterministe, injective et surjective mais pas totale

5. **Ensembles et ensembles infinis.** 40 points. Indiquez, avec $<$, $=$ ou $>$, comment se comparent les cardinalités des deux ensembles. Justifiez ensuite votre réponse.

a) $S = \{i : \mathbb{N} \mid \text{pair}(i)\}$ et \mathbb{Z}

b) $S = \{x : \mathbb{R} \mid 5x^2 - 7x - 8 = 0\}$ et \mathbb{Q}

c) \mathbb{R} et l'ensemble S qui contient chacune des formules arithmétiques f , telle que f est une formule écrite avec un nombre fini de caractères dans

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, *, /, (,)\},$$

qui est bien formée (syntaxiquement) et dont le résultat, une fois évaluée, est 18

d) $[0, 1]$ et $S = [1, 2] \cup [3, 4] \cup [5, 8] \cup [9, 11]$

