MAT-22257 : Exercices Série 10

Exercice 1 : Voici l'algorithme "Bubble sort" qui permet de mettre en ordre croissant les valeurs d'une séquence finie de la forme $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

> Si $n = 0$ alors a_0 est à la fois la plus petite et la plus grande valeur de la séquence. FIN
>
> **Pour** $i \leftarrow 0$ à $n-1$ **Faire**
>
> Compare a_n à a_{n-1},
> si $a_{n-1} \not\leq a_n$, interchange-les dans la séquence. $\langle$C.-à-d. : donne à a_{n-1} la la valeur de a_n et vice-versa.$\rangle$
>
> Puis compare a_{n-1} à a_{n-2},
> si $a_{n-2} \not\leq a_{n-1}$, interchange-les dans la séquence.
>
> Puis compare a_{n-2} à a_{n-3},
> si $a_{n-3} \not\leq a_{n-2}$, interchange-les dans la séquence.
>
> Et ainsi de suite jusqu'à la comparaison entre a_{i+1} et a_i, inclusivement.

On remarque que

- pour $i = 0$, l'algorithme effectuera n comparaisons et à la fin, a_0 sera la plus petite valeur de la séquence.
- pour $i = 1$, l'algorithme effectuera $n-1$ comparaisons et à la fin, a_0 n'aura pas bougé, restant donc la plus petite valeur de la séquence, et a_1 sera la plus petite valeur de la sous-séquence $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \rangle$.
- pour $i = 2$, l'algorithme effectuera $n-2$ comparaisons et à la fin, a_0 et a_1 n'auront pas bougé, restant donc dans l'ordre les deux plus petites valeurs de la séquence, et a_2 sera la plus petite valeur de la sous-séquence $\langle a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n \rangle$.
- etc...

Ainsi, cet algorithme met effectivement la séquence donnée $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ en ordre croissant.
Soit $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, la suite qui, étant donnée une séquence $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, calcule le nombre de comparaisons effectuer par l'algorithme.
ATTENTION : la séquence $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ a $n+1$ éléments.

a) Calculez b_0, b_1, b_2, b_3 et b_{10}. (*Aucune justification n'est demandé ici.*)

b) Donnez une définition de $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence. (*Expliquez brièvement votre réponse.*)

c) Résolvez la récurrence obtenue en b).

Exercice 2 : Tracez un graphe orienté dont la relation associée est

a) réflexive, symétrique et transitive.

b) une relation d'équivalence.

c) antisymétrique mais pas asymétrique.

d) un ordre partiel total.

Exercice 3 : Donnez la représentation matricielle de chacun des graphes que vous avez tracés à l'exercice 2.

Exercice 4 :

a) Tracez le graphe $G = \langle S,\ A \rangle$ suivant :

$$\begin{aligned} S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ A &= \{\{1, 2\},\ \{1, 4\},\ \{1, 5\},\ \{2, 3\},\ \{2, 6\},\ \{3, 4\},\ \{3, 7\},\ \{4, 8\},\ \{5, 6\},\ \{5, 8\},\ \{6, 7\},\ \{7, 8\}\} \end{aligned}$$

b) Est-ce que ce graphe est (i) planaire, (ii) bipartie, (iii) connexe ?

c) Trouvez un circuit hamiltonien dans ce graphe.

d) Déterminez le degré de chacun des sommets de ce graphe.

Exercice 5 :

Même questions qu'à l'exercice 4, pour le graphe $H = \langle S_H,\ A_H \rangle$ dont la représentation matricielle est :

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

Réponses :

1 Voir l'annexe aux notes de cours sur les résolutions de récurrences.

4b) (i) oui, car... (ii) oui, car... (iii) oui, car...

4c) $\langle 1,\ \{1, 2\},\ 2,\ \{2, 3\},\ 3,\ \{3, 4\},\ 4,\ \{4, 8\},\ 8,\ \{8, 7\},\ 7,\ \{7, 6\},\ 6,\ \{6, 5\},\ 5,\ \{5, 1\},\ 1 \rangle$

4d) Les sommets ont tous degré 3.

5b) (i) oui, car... (ii) non, car... (iii) oui, car...

5c) En format abrégé (sans l'identification des arcs) : $\langle 1, 2, 3, 10, 9, 8, 7, 16, 17, 18, 11, 12, 4, 5, 14, 13, 19, 20, 15, 6, 1 \rangle$

5d) Si on interprète le graphe comme un graphe non-orienté, les sommets ont tous degré 3.

Si on interprète le graphe comme un graphe orienté, les sommets ont tous degré 6.