MAT-22257 : Exercices Série 9

Réponses et\ou solutions.

Exercice 1 : Pour chacune des suites définies par récurrence suivantes, résolvez la récurrence.

a) $\begin{cases} a_0 &= 2 \\ a_n &= 3a_{n-1} + 2^n \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Solution : (*Méthode des séries génératrices*)

Étape 1 : (on exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle)

- On remarque que : $a_n - 3 \cdot a_{n-1} - (2^n) = 0 \quad \forall n : \mathbb{N}^*$;
- ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} a_1 - 3 \cdot a_0 - 2 &= 0 \\ a_2 - 3 \cdot a_1 - 2^2 &= 0 \\ a_3 - 3 \cdot a_2 - 2^3 &= 0 \\ a_4 - 3 \cdot a_3 - 2^4 &= 0 \\ \text{etc...} \end{aligned}$$

- Posons $G(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \cdots + a_n\, x^n + \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcccccccc} G(x) & = & a_0 & + & a_1x + & a_2x^2 + & a_3x^3 + \cdots + & a_nx^n + \cdots \\ -3x \cdot G(x) & = & & + & -3 \cdot a_0x + & -3 \cdot a_1x^2 + & -3 \cdot a_2x^3 + \cdots + & -3 \cdot a_{n-1}x^n + \cdots \\ -\frac{1}{1-2x} & = & -1 & + & -2x + & -(2^2)x^2 + & -(2^3)x^3 + \cdots + & -(2^n)x^n + \cdots \\ \hline G(x) - 3xG(x) - \frac{1}{1-2x} & = & a_0 - 1 + & & 0x + & 0x^2 + & 0x^3 + \cdots + & 0x^n + \cdots \end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - 3x\, G(x) - \frac{1}{1-2x} = 1$ $\langle$ Car $a_0 - 1 = 2 - 1 = 1.\rangle$

Donc, on a $G(x)(1-3x) = 1 + \frac{1}{1-2x}$

Donc, on a $G(x)(1-3x) = \frac{1-2x+1}{1-2x}$

Donc, on a $G(x)(1-3x) = \frac{2-2x}{1-2x}$

Donc, on a $G(x) = \frac{2-2x}{(1-3x)(1-2x)}$

Donc, on a $G(x) = \frac{-2x+2}{(1-3x)(1-2x)}$, ce qui est une forme beaucoup plus simple pour exprimer la fonction G.

Étape 2 : (on décompose la fonction G en fractions partielles)

$$\begin{array}{lrcll}
\text{On sait que} & \frac{-2x+2}{(1-3x)(1-2x)} & = & \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-2x} & \langle\text{Théorème 3.4 .}\rangle \\
\text{Alors, on a} & \frac{-2x+2}{(1-3x)(1-2x)} & = & \frac{A(1-2x)+B(1-3x)}{(1-3x)(1-2x)} & \\
\text{Ce qui implique} & -2x+2 & = & A(1-2x)+B(1-3x) & \\
\text{Donc} & -2x+2 & = & A\cdot 1 - 2Ax + B\cdot 1 - 3Bx & \\
\text{Donc} & -2x+2 & = & (-2A-3B)x + (A+B) & \\
\text{Ce qui donne} & 2 & = & A+B & (1) \\
 & -2 & = & -2A-3B & (2) \\
\text{Donc} & 2-B & = & A & (1') \\
\text{Donc} & -2 & = & -2(2-B)-3B & \langle\text{Substitution de (1') dans (2)}\rangle \\
\text{Donc} & -2 & = & -4+2B-3B & \\
\text{Donc} & 2 & = & -B & \\
\text{Donc} & B & = & -2 & \\
 & A & = & 2-(-2) \ = \ 4 & \\
\text{Conclusion :} & \frac{-2x+2}{(1-3x)(1-2x)} & = & \frac{4}{1-3x} + \frac{-2}{1-2x} &
\end{array}$$

Étape 3 : (on trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question)

$$\begin{array}{rcl}
G(x) & = & \frac{-2x+2}{(1-3x)(1-2x)} \\
 & = & \frac{4}{1-3x} + \frac{-2}{1-2x} \\
 & = & (4) + (4)\,3\cdot x + (4)\,3^2\cdot x^2 + (4)\,3^3\cdot x^3 + \cdots + (4)\,3^n\cdot x^n + \cdots \\
 & & \quad + \quad (-2) + (-2)\,2\cdot x + (-2)\,2^2\cdot x^2 + (-2)\,2^3\cdot x^3 + \cdots + (-2)\,2^n\cdot x^n + \cdots \\
 & = & (4) + (4)\,3\cdot x + (4)\,3^2\cdot x^2 + (4)\,3^3\cdot x^3 + \cdots + (4)\,3^n\cdot x^n + \cdots \\
 & & \quad + \quad -(2) + -(2^2)\cdot x + -(2^3)\cdot x^2 + -(2^4)\cdot x^3 + \cdots + -(2^{n+1})\cdot x^n + \cdots \\
 & = & ((4)-(2)) + ((4)\,3-(2^2))\cdot x + ((4)\,3^2-(2^3))\cdot x^2 + ((4)\,3^3-(2^4))\cdot x^3 + \cdots + ((4)\,3^n-(2^{n+1}))\cdot x^n + \cdots
\end{array}$$

Réponse : La définition par terme général est $\quad a_n \ = \ 4\cdot 3^n \ - \ 2^{n+1} \quad \forall n : \mathbb{N}$.

b) $\begin{cases} b_0 &= 0 \\ b_n &= b_{n-1} + n \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Solution 1 :
On remarque qu'il est possible que $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ soit *une suite de premiers termes* d'une suite arithmétique. (Voir Théorème 2.8 et Définition 2.7.)

Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par le terme général $a_n \;=\; 0 + n \cdot 1 \quad \forall n : \mathbb{N}$.
Alors,

(1) par le Théorème 2.2, on a que $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite arithmétique** de 1^er^ terme $a = 0$ et de différence $d = 1$.

(2) Et en plus, **on a bien que** $\begin{cases} b_0 &= a_0 \\ b_n &= b_{n-1} + a_n \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$ $\langle$Car $a_0 = 0$ et $a_n = 0 + n \cdot 1 = n.\rangle$

Donc, par le théorème 2.8, on a $b_n \;=\; \frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2} \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Réponse : $b_n \;=\; \frac{(0+0+n\cdot 1)(n+1)}{2} \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n : \mathbb{N}$

Solution 2 : (*Pour ceux qui aiment ça plus long : méthode des séries génératrices.*)

Étape 1 : (on exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle)

- On remarque que : $b_n \;-\; b_{n-1} - n \;=\; 0 \quad \forall n : \mathbb{N}^*$;
- ce qui en extension donne : $\begin{array}{c} b_1 - b_0 - 1 \;= 0 \\ b_2 - b_1 - 2 = 0 \\ b_3 - b_2 - 3 = 0 \\ b_4 - b_3 - 4 = 0 \\ \text{etc...} \end{array}$
- Posons $G(x) \;=\; b_0 \,+\, b_1\,x \,+\, b_2\,x^2 \,+\, b_3\,x^3 \,+\, \cdots \,+\, b_n\,x^n \,+\, \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcl} G(x) &=& b_0 + \quad b_1\,x + \quad b_2\,x^2 + \quad b_3\,x^3 + \cdots + \quad b_n\,x^n + \cdots \\ -x\cdot G(x) &=& \quad + \quad -b_0\,x + \quad -b_1\,x^2 + \quad -b_2\,x^3 + \cdots + -b_{n-1}\,x^n + \cdots \\ -\frac{x}{(1-x)^2} &=& 0 \;+ (-1)\cdot x + (-2)\cdot x^2 + (-3)\cdot x^3 + \cdots + (-n)\cdot x^n + \cdots \\ \hline G(x) - xG(x) - \frac{x}{(1-x)^2} &=& b_0 + \quad 0x + \quad 0x^2 + \quad 0x^3 + \cdots + \quad 0x^n + \cdots \end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - x\,G(x) - \frac{x}{(1-x)^2} \;=\; 0$ $\langle$ Car $\;b_0 \;=\; 0.\rangle$
Donc, on a $\;G(x)(1-x) \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}$
Donc, on a $\quad G(x) \;=\; \frac{x}{(1-x)^3}$.

Étape 2 : (on décompose la fonction G en fractions partielles)

$$\begin{array}{llcll}
\text{On sait que} & \frac{x}{(1-x)^3} & = & \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} & \langle\text{Théorème 3.4 .}\rangle \\
\text{Alors, on a} & \frac{0\cdot x^2+1\cdot x+0}{(1-x)^3} & = & \frac{A(1-x)^2+B(1-x)+C}{(1-x)^3} & \\
\text{Ce qui implique} & 0\cdot x^2+1\cdot x+0 & = & A(1-x)^2+B(1-x)+C & \\
\text{Donc} & 0\cdot x^2+1\cdot x+0 & = & A(1-2x+x^2)+B(1-x)+C & \\
\text{Donc} & 0\cdot x^2+1\cdot x+0 & = & A\cdot 1-2Ax+Ax^2+B\cdot 1-Bx+C & \\
\text{Donc} & 0\cdot x^2+1\cdot x+0 & = & Ax^2+(-2A-B)x+(A+B+C) & \\
\text{Ce qui donne} & 0 & = & A+B+C & (1) \\
 & 1 & = & -2A-B & (2) \\
 & 0 & = & A & (3) \\
\text{Donc} & 1 & = & -2(0)-B & \langle\text{Substitution de (3) dans (2)}\rangle \\
\text{Donc} & -1 & = & B & \\
\text{Donc} & 0 & = & 0\ +\ -1\ +\ C & \langle\text{Substitution dans (1)}\rangle \\
\text{Donc} & A & = & 0 & \\
 & B & = & -1 & \\
 & C & = & 1 &
\end{array}$$

Conclusion : $\frac{x}{(1-x)^3} = \frac{0}{1-x} + \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}$

Étape 3 : (on trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question)

$$\begin{array}{rcl}
G(x) & = & \frac{x}{(1-x)^3} \\
 & = & \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} \\
 & = & -1\ +\ -2\cdot x\ +\ -3\cdot x^2\ +\ -4\cdot x^3 + \cdots +\ -(n+1)\,x^n\ + \cdots \\
 & & \quad +\ \frac{2\cdot 1}{2}\ +\ \frac{3\cdot 2}{2}\,x\ +\ \frac{4\cdot 3}{2}\,x^2\ +\ \frac{5\cdot 4}{2}\,x^3 + \cdots +\ \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,x^n\ + \cdots \\
 & = & (-1+\frac{2\cdot 1}{2}) + (-2+\frac{3\cdot 2}{2})\cdot x + (-3+\frac{4\cdot 3}{2})\cdot x^2 + (-4-\frac{5\cdot 4}{2})\cdot x^3 + \cdots + \Big(-(n+1)+\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}\Big)\cdot x^n + \cdots
\end{array}$$

Réponse : La définition par terme général est $b_n = -(n+1) + \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} \quad \forall n : \mathbb{N}.$

Ce qui, une fois simplifié, donne $b_n = \frac{n\,(n+1)}{2} \quad \forall n : \mathbb{N}.$

c) $\begin{cases} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 8 \\ c_n &= 6\cdot c_{n-1} - 9\cdot c_{n-2} + 2^n \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \end{cases}$

Solution : (*Méthode des séries génératrices*)

Étape 1 : (on exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle)

- On remarque que : $c_n \,-\, 6\cdot c_{n-1} + 9\cdot c_{n-2} - 2^n \;=\; 0 \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\}$;
- ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} c_2 \,-\, 6\cdot c_1 + 9\cdot c_0 - 2^2 &= 0 \\ c_3 \,-\, 6\cdot c_2 + 9\cdot c_1 - 2^3 &= 0 \\ c_4 \,-\, 6\cdot c_3 + 9\cdot c_2 - 2^4 &= 0 \\ c_5 \,-\, 6\cdot c_4 + 9\cdot c_3 - 2^5 &= 0 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

- Posons $G(x) \;=\; c_0 \,+\, c_1\,x \,+\, c_2\,x^2 \,+\, c_3\,x^3 \,+\, \cdots \,+\, c_n\,x^n \,+\, \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcccccccccccc} G(x) & = & c_0 & + & c_1\,x & + & c_2\,x^2 & + & c_3\,x^3 & + \cdots + & c_n\,x^n & + \cdots \\ -6x\cdot G(x) & = & & + & -6\,c_0\,x & + & -6\,c_1\,x^2 & + & -6\,c_2\,x^3 & + \cdots + & -6\,c_{n-1}\,x^n & + \cdots \\ +9x^2\cdot G(x) & = & & & & + & 9\,c_0\,x^2 & + & 9\,c_1\,x^3 & + \cdots + & 9\,c_{n-2}\,x^n & + \cdots \\ -\frac{1}{1-2x} & = & -1 & + & -2x & + & -(2^2)x^2 & + & -(2^3)x^3 & + \cdots + & -(2^n)x^n & + \cdots \\ \hline G(x) - 6xG(x) + 9x^2G(x) - \frac{1}{(1-2x)} & = & (c_0-1) & + & (c_1 - 6c_0 - 2)x & + & 0x^2 & + & 0x^3 & + \cdots + & 0x^n & + \cdots \end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - 6x\,G(x) + 9x^2\,G(x) - \frac{1}{(1-2x)} \;=\; 0$ $\langle$ Car $c_0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $c_1 - 6c_0 - 2 = 8 - 6\cdot 1 - 2 = 0.$ $\rangle$

Donc, on a $G(x)(1 - 6x + 9x^2) \;=\; \frac{1}{(1-2x)}$

Donc, on a $G(x)(1-3x)^2 \;=\; \frac{1}{(1-2x)}$

Donc, on a $G(x) \;=\; \frac{1}{(1-3x)^2\,(1-2x)}$.

Étape 2 : (on décompose la fonction G en fractions partielles)

On sait que $\frac{1}{(1-3x)^2\,(1-2x)} \;=\; \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{(1-3x)^2} + \frac{C}{(1-2x)}$ $\langle$Théorème 3.4 .$\rangle$

Alors, on a $\frac{0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1}{(1-3x)^2\,(1-2x)} \;=\; \frac{A(1-3x)(1-2x) + B(1-2x) + C(1-3x)^2}{(1-3x)^2\,(1-2x)}$

Ce qui implique $0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1 \;=\; A(1-3x)(1-2x) + B(1-2x) + C(1-3x)^2$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Donc} & 0\cdot x^2+0\cdot x+1 & = & A(1-5x+6x^2)+B(1-2x)+C(1-6x+9x^2) & \\
\text{Donc} & 0\cdot x^2+0\cdot x+1 & = & A\cdot 1-5Ax+6Ax^2+B\cdot 1-2Bx+C\cdot 1-6Cx+9Cx^2 & \\
\text{Donc} & 0\cdot x^2+0\cdot x+1 & = & (6A+9C)x^2+(-5A-2B-6C)x+(A+B+C) & \\
\text{Ce qui donne} & 1 & = & A+B+C & (1) \\
 & 0 & = & -5A-2B-6C & (2) \\
 & 0 & = & 6A+9C & (3) \\
\text{Donc} & A & = & \frac{-3C}{2} & (3') \\
\text{Donc} & 1 & = & \frac{-3C}{2}+B+C \quad (1') & \langle\text{Substitution de (3') dans (1)}\rangle \\
\text{Donc} & 0 & = & -5\cdot\frac{-3C}{2}-2B-6C \quad (2') & \langle\text{Substitution de (3') dans (2)}\rangle \\
\text{Donc} & 1 & = & \frac{-1}{2}C+B & \text{Simplification de } (1') \\
\text{Donc} & 0 & = & \frac{3}{2}C-2B & \text{Simplification de } (2') \\
\text{Donc} & 2 & = & -C+2B & (1'') \\
\text{Donc} & 0 & = & 3C-4B & (2'') \\
\text{Donc} & \frac{4}{3}B & = & C & (2''') \\
\text{Donc} & 2 & = & \frac{-4}{3}B+2B & \langle\text{Substitution de (2''') dans (1'')}\rangle \\
\text{Donc} & 2 & = & \frac{2}{3}B & \\
\text{Donc} & B & = & 3 & \\
 & C & = & \frac{4}{3}3 \;=\; 4 & \\
 & A & = & \frac{-3\,(4)}{2} \;=\; -6 &
\end{array}$$

Conclusion : $\frac{1}{(1-3x)^2\,(1-2x)} \quad = \quad \frac{-6}{1-3x}+\frac{3}{(1-3x)^2}+\frac{4}{(1-2x)}$

Étape 3 : (on trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question)

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{(1-3x)^2\,(1-2x)} \\
&= \frac{1}{(1-3x)^2\,(1-2x)} \quad = \quad \frac{-6}{1-3x}+\frac{3}{(1-3x)^2}+\frac{4}{(1-2x)} \\
&= (-6)\,+\,(-6)\,3\cdot x\,+\,(-6)\,3^2\cdot x^2\,+\,(-6)\,3^3\cdot x^3+\,(-6)\,3^4\cdot x^4+\,\cdots\,+\,(-6)\,3^n\cdot x^n\,+\,\cdots \\
&\quad +\; (3)\,+\,2(3)\,3\cdot x\,+\,3(3)\,3^2\cdot x^2\,+\,4(3)\,3^3\cdot x^3+\,\cdots\,+\,(n+1)(3)\,3^n\cdot x^n\,+\,\cdots \\
&\quad +\; (4)\,+\,(4)\,2\cdot x\,+\,(4)\,2^2\cdot x^2\,+\,(4)\,2^3\cdot x^3+\,(4)\,2^4\cdot x^4+\,\cdots\,+\,(4)\,2^n\cdot x^n\,+\,\cdots \\
&= (-6+4+3)\,+\,((-6)\cdot 3+2\cdot(3)\cdot 3+(4)\cdot 2)\cdot x\,+\,((-6)\cdot 3^2+3\cdot(3)\cdot 3^2+(4)\cdot 2^2)\cdot x^2+\cdots+ \\
&\qquad +((-6)\cdot 3^n+(n+1)\cdot(3)\cdot 3^n+(4)\cdot 2^n)\cdot x^n+\cdots
\end{aligned}$$

Réponse : La définition par terme général est $\quad c_n \;=\; (-6)\cdot 3^n+(n+1)\cdot(3)\cdot 3^n+(4)\cdot 2^n \quad \forall n:\mathbb{N}.$

Ce qui, une fois simplifié, donne $\quad c_n \;=\; -2\cdot 3^{n+1}\,+\,(n+1)\cdot 3^{n+1}\,+\,4\cdot 2^n \quad \forall n:\mathbb{N}.$

d) $\begin{cases} d_0 &= 1 \\ d_1 &= 8 \\ d_n &= 6 \cdot d_{n-1} - 9 \cdot d_{n-2} \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \end{cases}$

Solution 1 : (*La méthode des récurrences linéaires homogènes*)

Nous allons appliquer le théorème 4.1.
Soit $p(x) = x^2 - 6x + 9$, le polynôme caractéristique de la suite $\langle d_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.
Par la formule quadratique, on constate facilement que les zéros de du polynôme p sont $x_1 = 3$ et $x_2 = 3$.

Comme $x_1 = x_2$, on a donc, par le Théorème 4.1, que le terme général de la suite $\langle d_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme

$$d_n = C_1 \cdot (3)^n + C_2 \cdot n \cdot (3)^n \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

Déterminons les valeurs de ces deux constantes :

On sait que $d_0 = 1$ et $d_1 = 8$.

Donc on a $\begin{array}{rcl} C_1 \cdot (3)^0 + C_2 \cdot 0 \cdot (3)^0 &=& 1 \\ C_1 \cdot (3)^1 + C_2 \cdot 1 \cdot (3)^1 &=& 8 \end{array}$

Donc on a $\begin{array}{rcl} C_1 \cdot 1 + 0 &=& 1 \\ C_1 \cdot (3) + C_2 \cdot 1 \cdot (3) &=& 8 \end{array}$

Donc on a $\begin{array}{rcl} C_1 &=& 1 \\ 3 \cdot C_1 + C_2 \cdot 1 \cdot 3 &=& 8 \end{array}$

Donc $\begin{array}{rcl} C_1 &=& 1 \\ C_2 &=& \frac{8 - 3 \cdot C_1}{3} \end{array}$

Donc $\begin{array}{rcl} C_1 &=& 1 \\ C_2 &=& \frac{5}{3} \end{array}$

Réponse : Le terme général de la suite $\langle d_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est

$$d_n = 3^n + 5n \cdot 3^{n-1} \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

Solution 2 : (*La méthode des séries génératrices*)

Si vous cherchez à faire compliqué quand on peut faire simple, faîtes-le vous même. : ·)

Exercice 2 : En utilisant le théorème sur les récurrences linéaires homogènes d'ordre 2, exprimez les séries génératrices des suites suivantes sous forme de fonctions rationnelles :

$$a) \quad \begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} b_0 &= 2 \\ b_1 &= 6 \\ b_n &= b_{n-1} + b_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 4 \\ c_n &= 4 \cdot c_{n-1} - 4 \cdot c_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} d_0 &= 1 \\ d_1 &= 1 \\ d_n &= 4 \cdot d_{n-1} - 4 \cdot d_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

Réponses :

2a) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2b) $b_n = (1+\sqrt{5}) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (1-\sqrt{5}) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2c) $c_n = 2^n \cdot (n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2d) $d_n = 2^{n-1} \cdot (2-n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 3 : *Voir Annexe des notes de cours sur les résolutions de récurrences*