MAT-22257 : Exercices Série 8

Exercice 1 : Trouvez le terme général des suites suivantes :

a) $a_n = 1+3+5+7+9+\cdots+(2n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\begin{cases} b_0 = -2 \\ b_n = b_{n-1}+5n-2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Exercice 2 : Évaluez : $32+8+2+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{524288}$

Exercice 3 : Exprimez les séries génératrices des suites suivantes sous forme de fonctions rationnelles :

$a)\ \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2\cdot a_{n-1}+3^n \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_n = b_{n-1}+n \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1}+c_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N}-\{0,1\} \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = 1 \\ d_n = 4\cdot d_{n-1}-4\cdot d_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N}-\{0,1\} \end{cases}$

Exercice 4 : Décomposez en fractions partielles les fonctions rationnelles suivantes :

$a)\ a(x) = \frac{1}{(x+4)(x+3)}$ $\quad b)\ b(x) = \frac{x}{(1-x^2)(1-x)}$ $\quad c)\ c(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$d)\ d(x) = \frac{1-3x}{1-4x+4x^2}$ $\quad e)\ e(x) = \frac{1-3x}{(1-2x)^2}$ $\quad f)\ f(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\,(x-2)}$

Exercice 5 : Trouvez la série de puissances associée à chacune des fonctions suivantes.

$a)\ a(x) = \frac{1}{(1-5x)}$ $\quad b)\ b(x) = \frac{3}{x-5}$ $\quad c)\ c(x) = \frac{1}{(x+4)(x+3)}$ $\quad d)\ d(x) = \frac{\frac{3}{2}}{1-2x}+\frac{\frac{-1}{2}}{(1-2x)^2}$

Réponses : 1a) $a_n = (n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ **1b)** $b_n = \frac{(5n-4)(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ **2)** $\frac{32\,\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{12+1}\right)}{1-\frac{1}{4}} = \cdots$ **3a)** $G(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$

3b) $G(x) = \frac{x^2-x+1}{(1-x)^3}$ **3c)** $G(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ **3d)** $G(x) = \frac{1-3x}{(1-2x)^2}$.

4a) $G(x) = \frac{-1}{(x+4)}+\frac{1}{(x+3)}$ **4b)** $G(x) = \frac{\frac{-1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2}+\frac{\frac{-1}{4}}{(1+x)}$ **4c)** $G(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{x-3}$

4d) Voir 4e) **4e)** $G(x) = \frac{\frac{3}{2}}{1-2x}+\frac{\frac{-1}{2}}{(1-2x)^2}$ **4f)** $G(x) = \frac{-10}{x-1}+\frac{-6}{(x-1)^2}+\frac{11}{x-2}$.

5a) $1 + 5\cdot x + 5^2\cdot x^2 + 5^3\cdot x^3 + \cdots + 5^n\cdot x^n + \cdots$

5b) $\frac{\frac{-3}{5}}{1-\frac{1}{5}x} = \frac{-3}{5} + \frac{-3}{5}\,\frac{1}{5}\cdot x + \frac{-3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot x^2 + \frac{-3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot x^3 + \cdots + \frac{-3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdot x^n + \cdots$

5c) $\frac{\frac{-1}{4}}{1-(\frac{-1}{4})x}+\frac{\frac{1}{3}}{1-(\frac{-1}{3})x} =$

$(\frac{-1}{4}-\frac{-1}{3}) + ((\frac{-1}{4})^2-(\frac{-1}{3})^2)\cdot x + ((\frac{-1}{4})^3-(\frac{-1}{3})^3)\cdot x^2 + ((\frac{-1}{4})^4-(\frac{-1}{3})^4)\cdot x^3 + \cdots + ((\frac{-1}{4})^{n+1}-(\frac{-1}{3})^{n+1})\cdot x^n + \cdots$

5d) $1 + 1\cdot x + (2^2-2\cdot 2^1)\cdot x^2 + (2^3-3\cdot 2^2)\cdot x^3 + (2^4-4\cdot 2^3)\cdot x^4 + \cdots + (2^n-n\cdot 2^{n-1})\cdot x^n + \cdots$