MAT-22257 : Exercices Série 7

Réponses et\ou solutions.

Exercice 1 : Étant donnée la formule : $(\sum i \mid 0 \leq i \leq n : 2i) = n(n+1)$.

a) Vérifiez cette formule pour $n = 0, 1, 2, 5$ et 10. *Ça, vous êtes capable de le faire seul.*

b) Démontrez par induction que cette formule est vraie pour tout $n : \mathbb{N}$.

Démonstration

Prenons le prédicat P(n) : $(\sum i \mid 0 \leq i \leq n : 2i) = n(n+1)$.
Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \mid: \mathrm{P}(n))$.
Et par le principe d'induction mathématique,
il suffit de démontrer que $\mathrm{P}(0) \;\wedge\; (\forall n : \mathbb{N}^* \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Montrons P$(\mathbf{0})$. (*C'est-à-dire, montrons* $(\sum i \mid 0 \leq i \leq 0 : 2i) = 0(0+1)$).

$$(\textstyle\sum i \mid 0 \leq i \leq 0 : 2i) \;=\; 2 \cdot 0 \;=\; 0(0+1).$$

Montrons $(\forall \mathbf{n} : \mathbb{N}^* \mid \mathbf{P(n-1)} : \mathbf{P(n)})$.

Soit $n : \mathbb{N}^*$, choisi tel que P$(n-1)$ est vrai. (*C'est-à-dire, tel que* $(\sum i \mid 0 \leq i \leq n-1 : 2i) = (n-1)((n-1)+1)$.)

⟨ Et montrons P(n). (*c'est à dire* $(\sum i \mid 0 \leq i \leq n : 2i) = n(n+1)$.) ⟩

$(\sum i \mid 0 \leq i \leq n : 2i)$
$=$ ⟨ Passage de l'écriture en compréhension à l'écriture en extension.⟩
$2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot n$
$=$
$2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n$
$=$
$\Big(2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (n-1)\Big) + 2 \cdot n$
$=$ ⟨ Passage de l'écriture en extension à l'écriture en compréhension.⟩
$\Big(\sum i \mid 0 \leq i \leq n-1 : 2i)\Big) + 2 \cdot n$
$=$ ⟨ Hypothèse d'induction.⟩
$(n-1)((n-1)+1) + 2 \cdot n$
$=$ ⟨ Développement de l'expression.⟩
$(n^2 - n) + 2n$
$=$
$n^2 + n$
$=$ ⟨ Mise en évidence.⟩
$n(n+1)$

On a démontré $(\forall n : \mathbb{N}^* \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Conclusion : on a bien $\Big(\forall n : \mathbb{N} \mid: \mathrm{P}(n)\Big)$,
c'est à dire : $(\sum i \mid 0 \leq i \leq n-1 : 2i) = (n-1)((n-1)+1)$.

C.Q.F.D.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application qui satisfait la règle de récurrence suivante :

$$\begin{cases} f(0) & = & 3 \\ f(k+1) & = & 2 \cdot f(k) + 2k - 4 \end{cases}$$

a) Évaluez $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$ et $f(10)$.
Réponse : $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(5) = 24$ et $f(10) = 1006$.

b) Démontrez par induction que $f(n) = 2^n - 2n + 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}$.

Démonstration
Prenons le prédicat $\mathrm{P}(n)$: $f(n) = 2^n - 2n + 2$.
Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \mid: \mathrm{P}(n))$.
Et par le principe d'induction mathématique,
il suffit de démontrer que $\mathrm{P}(0) \ \wedge \ (\forall n : \mathbb{N} \mid \mathrm{P}(n) : \mathrm{P}(n+1))$. [1]

Montrons $\mathbf{P(0)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $f(0) = 2^0 - 2 \cdot 0 + 2$).

$$2^0 - 2 \cdot 0 + 2 \ = \ 1 - 0 + 2 \ = \ 3 \ = \ f(0).$$

Montrons $(\forall \mathbf{n} : \mathbb{N} \mid \mathbf{P(n)} : \mathbf{P(n+1)})$.

Soit $n : \mathbb{N}$, choisi tel que $\mathrm{P}(n)$ est vrai. (*C'est-à-dire, tel que* $f(n) = 2^n - 2n + 2$.)

⟨ Et montrons $\mathrm{P}(n+1)$. (*c'est à dire* $f(n+1) = 2^{n+1} - 2(n+1) + 2$.) ⟩

$f(n+1)$
$=$ ⟨ Définition de f, car $n \in \mathbb{N}$.⟩
$2 \cdot f(n) + 2n - 4$
$=$ ⟨ Hypothèse d'induction.⟩
$2(2^n - 2n + 2) + 2n - 4$
$=$ ⟨ Simplifications algébriques.⟩
$2 \cdot 2^n - 4n + 4 + 2n - 4$
$=$ ⟨ Simplifications algébriques.⟩
$2^{n+1} - 2n - 2 + 2$
$=$ ⟨ Mise en évidence.⟩
$2^{n+1} - 2(n+1) + 2$

On a démontré $(\forall n : \mathbb{N} \mid \mathrm{P}(n) : \mathrm{P}(n+1))$.

Conclusion : on a bien $\Big(\forall n : \mathbb{N} \mid: \mathrm{P}(n)\Big)$,

c'est à dire : $f(n) = 2^n - 2n + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

[1] Notez que j'ai choisi cette forme du principe d'induction car elle me semblait mieux adaptée à ce problème.

Exercice 3 : Soit la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & 2 \\ a_n & = & 3a_{n-1} + 2 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{array} \right.$ Montrez par induction que le terme général de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est $\quad a_n \;=\; 3^{n+1} - 1 \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Démonstration
Prenons le prédicat $\quad \mathrm{P}(n)$: $\quad a_n = 3^{n+1} - 1$.
Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \,|\!: \mathrm{P}(n))$.
Et par le principe d'induction mathématique,
il suffit de démontrer que $\quad \mathrm{P}(0) \;\wedge\; (\forall n : \mathbb{N}^\star \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Montrons $\mathbf{P(0)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $a_0 = 3^{0+1} - 1$).

$3^{0+1} - 1 \;=\; 3 - 1 \;=\; 2 \;=\; a_0$.

Montrons $(\forall \mathbf{n} : \mathbb{N}^* \mid \mathbf{P(n-1)} : \mathbf{P(n)})$.

Soit $n : \mathbb{N}^\star$, choisi tel que $\mathrm{P}(n-1)$ est vrai. (*C'est-à-dire, tel que* $a_{n-1} = 3^{(n-1)+1} - 1$.)

$\langle$ Et montrons $\mathrm{P}(n)$. (*c'est à dire* $a_n = 3^{n+1} - 1$.) $\rangle$

a_n
$=$ $\quad\langle$ Définition de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, car $n \in \mathbb{N}^\star$. $\rangle$
$3\,a_{n-1} + 2$
$=$ $\quad\langle$ Hypothèse d'induction.$\rangle$
$3(3^{(n-1)+1} - 1) + 2$
$=$ $\quad\langle$ Simplification algébriques.$\rangle$
$3(3^n - 1) + 2$
$=$ $\quad\langle$ Par distributivité.$\rangle$
$3 \cdot 3^n - 3 + 2$
$=$ $\quad\langle$ Simplifications algébriques.$\rangle$
$3^{n+1} - 1$

On a démontré $(\forall n : \mathbb{N}^\star \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Conclusion : on a bien $\Big(\forall n : \mathbb{N} \,|\!: \mathrm{P}(n)\Big)$,

c'est à dire : $a_n = 3^{n+1} - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

Exercice 4 : Soit la suite $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\left\{ \begin{array}{lcl} b_0 & = & -4 \\ b_n & = & 3\,b_{n-1} \,+\, 4n \,+\, 4 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

Montrez par induction que le terme général de la suite $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est $\quad b_n = 3^n - 2n - 5 \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Démonstration
Prenons le prédicat $\quad \mathrm{P}(n)$: $\quad b_n = 3^n - 2n - 5$.
Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \,|\!: \mathrm{P}(n))$.

Et par le principe d'induction mathématique,
il suffit de démontrer que $\mathrm{P}(0) \ \wedge \ (\forall n : \mathbb{N}^\star \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Montrons $\mathbf{P(0)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $b_0 = 3^0 - 2 \cdot 0 - 5$).

$$3^0 - 2 \cdot 0 - 5 \ = \ 1 - 0 - 5 \ = \ -4 \ = \ b_0.$$

Montrons $(\forall \mathbf{n} : \mathbb{N}^* \mid \mathbf{P(n-1)} : \mathbf{P(n)})$.

Soit $n : \mathbb{N}^\star$, choisi tel que $\mathrm{P}(n-1)$ est vrai. (*C'est-à-dire, tel que* $b_{n-1} = 3^{n-1} - 2(n-1) - 5$.)

⟨ Et montrons $\mathrm{P}(n)$. (*c'est à dire* $b_n = 3^n - 2n - 5$.) ⟩

b_n

$=$ ⟨ Définition de la suite $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, car car $n \in \mathbb{N}^\star$. ⟩

$3\, b_{n-1} \ + \ 4n \ + \ 4$

$=$ ⟨ Hypothèse d'induction.⟩

$3(3^{n-1} - 2(n-1) - 5) \ + \ 4n \ + \ 4$

$=$ ⟨ Simplification algébriques.⟩

$3 \cdot 3^{n-1} - 6n + 6 - 15 \ + \ 4n \ + \ 4$

$=$ ⟨ Simplifications algébriques.⟩

$3^n \ - \ 2n \ - \ 5$

On a démontré $(\forall n : \mathbb{N}^\star \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Conclusion : on a bien $\Big(\forall n : \mathbb{N} \mid : \mathrm{P}(n)\Big)$,
c'est à dire : $b_n = 3^n - 2n - 5 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

Exercice 5 : Soit la suite $\langle c_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} c_0 &= 1 \\ c_1 &= 1 \\ c_n &= 4 \cdot c_{n-1} - 4 \cdot c_{n-2} \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \end{cases}$

Montrez par induction que le terme général de la suite $\langle c_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est $\quad c_n \ = \ 2^{n-1} \cdot (2-n) \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Démonstration
Prenons le prédicat $\mathrm{P}(n) : \quad c_n = 2^{n-1} \cdot (2-n)$.
Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \mid : \mathrm{P}(n))$.
Et par le principe d'induction mathématique à deux cas de base,
il suffit de démontrer que $\mathrm{P}(0) \ \wedge \ \mathrm{P}(1) \ \wedge \ (\forall n : \mathbb{N} \backslash \{0,1\} \mid \mathrm{P}(n-2) \wedge \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Montrons $\mathbf{P(0)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $c_0 = 2^{0-1} \cdot (2-0)$).

$$2^{0-1} \cdot (2-0) \ = \ \tfrac{1}{2} \cdot 2 \ = \ 1 \ = \ c_0.$$

Montrons P(1). (*C'est-à-dire, montrons* $c_1 = 2^{1-1} \cdot (2-1)$).

$2^{1-1} \cdot (2-1) \ = \ 1 \cdot 1 \ = \ 1 \ = \ c_1.$

Montrons $(\forall \mathbf{n} : \mathbb{N} \backslash \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \mid \mathbf{P}(\mathbf{n}-\mathbf{2}) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{n}-\mathbf{1}) : \mathbf{P}(\mathbf{n}))$**.**

Soit $n : \mathbb{N}^{\star}$, choisi tel que $\mathrm{P}(n-2)$ et $\mathrm{P}(n-1)$ est vrai. *C'est-à-dire, tel que* $\begin{cases} c_{n-2} & = & 2^{(n-2)-1} \cdot (2-(n-2)) \\ & \textit{et} & \\ c_{n-1} & = & 2^{(n-1)-1} \cdot (2-(n-1)) \end{cases}$

⟨ Et montrons $\mathrm{P}(n)$. (*c'est à dire* $c_n = 2^{n-1} \cdot (2-n)$.) ⟩

c_n

$=$ ⟨ Définition de la suite $\langle c_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, car $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. ⟩

$4 \cdot c_{n-1} - 4 \cdot c_{n-2}$

$=$ ⟨ Hypothèse d'induction.⟩

$4\Big(2^{(n-1)-1} \cdot (2-(n-1))\Big) \ - \ 4\Big(2^{(n-2)-1} \cdot (2-(n-2))\Big)$

$=$ ⟨ Simplification algébriques.⟩

$4\Big(2^{n-2} \cdot (3-n)\Big) \ - \ 4\Big(2^{n-3} \cdot (4-n)\Big)$

$=$ ⟨ Simplifications algébriques.⟩

$12 \cdot 2^{n-2} - 4n \cdot 2^{n-2} - 16 \cdot 2^{n-3} + 4n \cdot 2^{n-3}$

$=$ ⟨ Ré-écriture de l'expression.⟩

$6 \cdot 2 \cdot 2^{n-2} - 2n \cdot 2 \cdot 2^{n-2} - 4 \cdot 4 \cdot 2^{n-3} + n \cdot 4 \cdot 2^{n-3}$

$=$ ⟨ Simplifications algébriques.⟩

$6 \cdot 2^{n-1} - 2n \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^{n-1}$

$=$ ⟨ Mise en évidence.⟩

$2^{n-1} \cdot (6 - 2n - 4 + n))$

$=$ ⟨ Simplifications algébriques.⟩

$2^{n-1} \cdot (2-n)$

On a démontré $\Big(\forall n : \mathbb{N} \backslash \{0, 1\} \mid \mathrm{P}(n-2) \wedge \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n)\Big)$.

Conclusion : on a bien $\Big(\forall n : \mathbb{N} \mid: \mathrm{P}(n)\Big)$,

c'est à dire : $c_n = 2^{n-1} \cdot (2-n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

Exercice 6 :

a) Est-ce que la suite $\langle c_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, définie par le terme général $c_n \ = \ 5n - 6 \quad \forall n : \mathbb{N}$, est une suite arithmétique ?
Réponse : oui, voir le Théorème R.2.2 (3. $\Rightarrow$ 1.)

b) Donnez c_0, c_1 et c_{200}.
Réponse : $c_0 = -6$, $c_1 = -1$ et $c_{200} = 994$.

c) Soit la suite $\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} S_0 &= -6 \\ S_n &= S_{n-1} + 5n - 6 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Montrez (sans utiliser l'induction) que le terme général de la suite $\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est $S_n = \frac{(n+1)(5n-12)}{2} \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Démonstration

Comme la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique (voir a)), S_n est donc une suite de somme de premiers termes d'une suite arithmétique, par le Théorème R.2.8, on obtient donc

$$S_n = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} = \frac{(-6 + 5n - 6)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(5n-12)}{2} \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

C.Q.F.D.

Exercice 7 : Soit la suite $\langle d_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} d_0 &= 5 \cdot 2^3 \\ d_n &= d_{n-1} + 5 \cdot 2^{n+3} \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Montrez (sans utiliser l'induction) que le terme général de la suite $\langle d_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est $d_n = \frac{5 \cdot 2^3\,(1-2^{n+1})}{-1} \quad \forall n : \mathbb{N}$

Démonstration

Soit la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le terme général $a_n = 5 \cdot 2^{n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Comme $5 \cdot 2^{n+3} = (5 \cdot 2^3) \cdot 2^n$ et comme $a_0 = 5 \cdot 2^3$, par le théorème R.2.5 (3. $\Rightarrow$ 1.) on remarque que : la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $a = 5 \cdot 2^3$ et de raison $r = 2$.

On a donc que la suite S_n est une suite de sommes de premiers termes d'une suite géométrique, par le Théorème R.2.10, on obtient donc

$$S_n = \frac{5 \cdot 2^3 \cdot (1 - 2^{n+1})}{1-2} = \frac{5 \cdot 2^3 \cdot (1 - 2^{n+1})}{-1} \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

C.Q.F.D.

Exercice 8 : Vous placez $\$1000.^{00}$ dans un compte à intérêt composé de 5% par année.

Ainsi, après un an il y aura dans votre compte, $\$1000.^{00} + (5\%$ *de* $\$1000.^{00})$*, c'est-à-dire, en tout* $\$1050.^{00}$*. Après deux ans, il y aura dans votre compte,* $\$1050.^{00} + (5\%$ *de* $\$1050.^{00})$*, etc...*

Soit $\langle \$_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, la suite qui donne le montant d'argent qu'il a dans votre compte après n années.

a) Définissez $\langle \$_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

Réponse : $\begin{cases} \$_0 &= 1000 \\ \$_n &= \$_{n-1} + 0.05 \cdot \$_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \end{cases}$

ou encore

Réponse : $\begin{cases} \$_0 &= 1000 \\ \$_n &= 1.05 \cdot \$_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \end{cases}$

b) Trouvez le terme général de $\langle \$_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration

En se basant sur la deuxième réponse du numéro b) et sur le théorème R.2.5(2. $\Rightarrow$ 1.), on constate que $\langle \$_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1000$ et de raison $r = 1.05$.

Par le (2. $\Rightarrow$ 3.) de ce théorème on obtient donc que le terme général de cette suite est :

$$\$_n = 1000 \cdot 1.05^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

C.Q.F.D.

c) Après 10 ans, combien d'argent y aura-t-il dans le compte ?

Réponse : $\$_{10} = 1000 \cdot 1.05^{10} = 1628.89$ dollars.