MAT-22257 : Exercices Série 7

Exercice 1 : Étant donnée la formule : $(\sum i \mid 0 \leq i \leq n : 2i) = n(n+1)$.

a) Vérifiez cette formule pour $n = 0$, 1, 2, 5 et 10.

b) Démontrez par induction que cette formule est vraie pour tout $n : \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application qui satisfait la règle de récurrence suivante :

$$\begin{cases} f(0) & = & 3 \\ f(k+1) & = & 2 \cdot f(k) + 2k - 4 \end{cases}$$

a) Évaluez $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$ et $f(10)$.

b) Démontrez par induction que $f(n) = 2^n - 2n + 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Soit la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} a_0 & = & 2 \\ a_n & = & 3a_{n-1} + 2 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Montrez par induction que le terme général de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est $a_n = 3^{n+1} - 1 \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Soit la suite $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} b_0 & = & -4 \\ b_n & = & 3\,b_{n-1} + 4n + 4 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Montrez par induction que le terme général de la suite $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est $b_n = 3^n - 2n - 5 \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Soit la suite $\langle c_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} c_0 & = & 1 \\ c_1 & = & 1 \\ c_n & = & 4 \cdot c_{n-1} - 4 \cdot c_{n-2} \quad \forall n : \mathbb{N} - \{0,1\} \end{cases}$

Montrez par induction que le terme général de la suite $\langle c_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est $c_n = 2^{n-1} \cdot (2-n) \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Exercice 6 :

a) Est-ce que la suite $\langle c_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, définie par le terme général $c_n = 5n - 6 \quad \forall n : \mathbb{N}$, est une suite arithmétique ?

b) Donnez c_0, c_1 et c_{200}.

c) Soit la suite $\langle S_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} S_0 & = & -6 \\ S_n & = & S_{n-1} + 5n - 6 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Montrez (sans utiliser l'induction) que le terme général de la suite $\langle S_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est $S_n = \frac{(n+1)(5n-12)}{2} \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Exercice 7 : Soit la suite $\langle d_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} d_0 &= 5\cdot 2^3 \\ d_n &= d_{n-1} + 5\cdot 2^{n+3} \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$

Montrez (sans utiliser l'induction) que le terme général de la suite $\langle d_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est $\quad d_n = \frac{5\cdot 2^3\,(1-2^{n+1})}{-1} \quad \forall n : \mathbb{N}$

Exercice 8 : Vous placez $\$1000.^{00}$ dans un compte à intérêt composé de 5% par année.

> *Ainsi, après un an il y aura dans votre compte,* $\$1000.^{00} + (5\%$ *de* $\$1000.^{00})$*, c'est-à-dire, en tout* $\$1050.^{00}$. *Après deux ans, il y aura dans votre compte,* $\$1050.^{00} + (5\%$ *de* $\$1050.^{00})$*, etc...*

Soit $\langle \$_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, la suite qui donne le montant d'argent qu'il a dans votre compte après n années.

a) Définissez $\langle \$_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

b) Trouvez le terme général de $\langle \$_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Après 10 ans, combien d'argent y aura-t-il dans le compte ?