MAT-22257 : Exercices Série 6

Réponses et\ou solutions.

Exercice 1 :

(A) Sans justifiez vos réponses, dites si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.

a) une relation asymétrique est toujours antisymétrique et irréflexive. $\_\_VRAI\_\_\_$.

b) Si $\rho = \{x, y : \mathbb{N} \mid x < y : \langle x, y\rangle\}$, alors $\rho^{-1} = \{x, y : \mathbb{N} \mid x > y : \langle x, y\rangle\}$
et $\sim \rho = \{x, y : \mathbb{N} \mid x \geq y : \langle x, y\rangle\}$. $\_\_VRAI\_\_\_$.

c) Si $\theta = \{A, B : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subset B : \langle A, B\rangle\}$, alors $\theta^{-1} = \{A, B : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \supset B : \langle A, B\rangle\}$
et $\sim \theta = \{A, B : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \supseteq B : \langle A, B\rangle\}$. $\_\_FAUX\_\_\_$.

d) $\left|\mathbb{N}^{\{0,1\}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$. $\_\_FAUX\_\_\_$.

d) $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ est dénombrable. $\_\_FAUX\_\_\_$.

(B) Complétez et justifiez brièvement :

a) S'il n'existe pas d'application surjective de A vers $\mathbb{N}$, alors A est ______ $FINI$ ___________.

Justification : Par le Théorème I.3.9 (*1*$\leftrightarrow$*9*), on sait que $\left|A\right| < \left|\mathbb{N}\right|$.

Comme en plus $\left|\mathbb{N}\right|$ est la plus petite cardinalité infinie (voir le théorème I.3.7), on a donc que l'ensemble A doit être un ensemble fini.

b) S'il n'existe pas d'application surjective de $\mathbb{N}$ vers A, alors A est __ *NON DÉNOMBRABLE* __.

Justification : Théorème I.3.11 (*1*$\leftrightarrow$*3*).

c) Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une famille d'ensembles finis, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est __ DÉNOMBRABLE ___.
Justification : *À venir.*

d) Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, une famille d'ensembles infinis dénombrables,
alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est __ INFINIS DÉNOMBRABLE ___.
Justification : *À venir.*

Exercice 2 :

a) Démontrez que l'ensemble de tous les mots *finis* sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$ est dénombrable alors que l'ensemble de tous les mots *infinis* sur ce même alphabet ne l'est pas.

b) Est-ce que l'ensemble de tous les mots (*finis et infinis*) sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$ est dénombrable ? justifiez brièvement.

Solution de 2a– partie I : il y a un nombre dénombrable de mots finis sur l'alphabet à deux lettres

On remarque facilement que sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$,

- il n'y a qu'un nombre fini de mots de longueur 0. En fait il n'y en a qu'un, le *mots vide* qui est généralement noté par ε.
- il n'y a qu'un nombre fini de mots de longueur 1. En fait il n'y en a que deux, a et b.
- et en général pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de de mots de longueur n.

Notons par $\mathcal{M}_{finis}$, l'ensemble de tous les mots finis sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$.
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{M}_{finis}$, une application bijective définie en extension de la manière suivante :

Longueur du mot	$\mathcal{M}_{finis}$							
0	ε $\uparrow$ $f(0)$							
1	a $\uparrow$ $f(1)$	b $\uparrow$ $f(2)$						
2	aa $\uparrow$ $f(3)$	ab $\uparrow$ $f(4)$	ba $\uparrow$ $f(5)$	bb $\uparrow$ $f(6)$				
3	aaa $\uparrow$ $f(7)$	aab $\uparrow$ $f(8)$	aba $\uparrow$ $f(9)$	abb $\uparrow$ $f(10)$	baa $\uparrow$ $f(11)$	bab $\uparrow$ $f(12)$	bba $\uparrow$ $f(13)$	bbb $\uparrow$ $f(14)$
$\vdots$				$\vdots$				

Ainsi, il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{M}_{finis}$,

L'ensemble de tous les mots finis sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$ est donc dénombrable.

C.Q.F.D.

Solution de 2a– partie II : il y a un nombre non dénombrable de mots infinis sur l'alphabet à deux lettres

Notons par $\mathcal{M}_{infinis}$, l'ensemble de tous les mots infinis sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$.

Ainsi un élément de $\mathcal{M}_{infinis}$ est un élément de la forme

$$\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \rangle$$

où chacun des α_i est soit la lettre "a" soit la lettre "b".

Un mot infini $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \rangle$ est donc une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{$"$a$", "$b$"$\}$ où $f(0) = \alpha_0$, $f(1) = \alpha_1$, $f(2) = \alpha_2$, $f(3) = \alpha_3$, ...
Et inversement, une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{$"$a$", "$b$"$\}$ est le mot $\langle f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots \rangle$

Ainsi, l'ensemble de tous les mots infinis sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$ **est égale** à l'ensemble $\{$"a", "b"$\}^{\mathbb{N}}$.

Comme $\Big|\{$"a", "b"$\}\Big| \geq 2$ et comme $\mathbb{N}$ est infini, par le théorème 3.18, on a donc que $\{$"a", "b"$\}^{\mathbb{N}}$ est un ensemble non dénombrable.

L'ensemble de tous les mots infinis sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$ est donc non dénombrable.

C.Q.F.D.

Solution de 2b) Puisque $\mathcal{M}_{infinis} \subseteq \mathcal{M}_{finis} \cup \mathcal{M}_{infinis}$, on a donc par Proposition 3.5 que

$$\Big|\mathcal{M}_{infinis}\Big| \leq \Big|\mathcal{M}_{finis} \cup \mathcal{M}_{infinis}\Big|.$$

Comme on a montré en (2a– partie II) que $\mathcal{M}_{infinis}$ est non dénombrable,
on a donc que $\mathcal{M}_{finis} \cup \mathcal{M}_{infinis}$ est lui aussi un ensemble non dénombrable.

L'ensemble de tous les mots (finis et infinis) sur l'alphabet $\{$"a", "b"$\}$ est donc non dénombrable.

C.Q.F.D.

Exercice 3 :

Démontrez que l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est dénombrable alors que l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ ne l'est pas.

Solution :

1.- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable.

Par le Théorème 3. 14 (Cantor)[avec $A := \mathbb{N}$], on a que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$.
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est donc non dénombrable.

C.Q.F.D.

2.- L'ensemble de tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est dénombrable. On remarque facilement :

- qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ dont la somme des éléments est égale à 0. En fait il n'y en a que deux, $\emptyset$ et $\{0\}$.
- qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ dont la somme des éléments est égale à 1. En fait il n'y en a que deux, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$.

– qu'en général pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ ne contenant aucun nombre négatif, il n'y a qu'un nombre fini de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ dont la somme des éléments est égale à n.

Notons par A, l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, une application bijective définie en extension de la manière suivante :

Somme des éléments du sous-ensemble	A							
0	$\emptyset$ $\uparrow$ $f(0)$	$\{0\}$ $\uparrow$ $f(1)$						
1	$\{1\}$ $\uparrow$ $f(2)$	$\{0,1\}$ $\uparrow$ $f(3)$						
2	$\{2\}$ $\uparrow$ $f(4)$	$\{0,2\}$ $\uparrow$ $f(5)$						
3	$\{3\}$ $\uparrow$ $f(6)$	$\{0,3\}$ $\uparrow$ $f(7)$	$\{1,2\}$ $\uparrow$ $f(8)$	$\{0,1,2\}$ $\uparrow$ $f(9)$				
4	$\{4\}$ $\uparrow$ $f(10)$	$\{0,4\}$ $\uparrow$ $f(11)$	$\{1,3\}$ $\uparrow$ $f(12)$	$\{0,1,3\}$ $\uparrow$ $f(13)$				
5	$\{5\}$ $\uparrow$ $f(14)$	$\{0,5\}$ $\uparrow$ $f(15)$	$\{1,4\}$ $\uparrow$ $f(16)$	$\{0,1,4\}$ $\uparrow$ $f(17)$	$\{2,3\}$ $\uparrow$ $f(18)$	$\{0,2,3\}$ $\uparrow$ $f(19)$		
6	$\{6\}$ $\uparrow$ $f(20)$	$\{0,6\}$ $\uparrow$ $f(21)$	$\{1,5\}$ $\uparrow$ $f(22)$	$\{0,1,5\}$ $\uparrow$ $f(23)$	$\{2,4\}$ $\uparrow$ $f(24)$	$\{0,2,4\}$ $\uparrow$ $f(25)$	$\{1,2,3\}$ $\uparrow$ $f(26)$	$\{0,1,2,3\}$ $\uparrow$ $f(27)$
$\vdots$				$\vdots$				

Ainsi, il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ vers A,
A est donc dénombrable.

C.Q.F.D.

Exercice 4 :

a) Les données d'entrée et de sortie d'un programme sont des séquences de bits. On peut donc considérer une séquence de bits comme un nombre naturel exprimé en binaire (en ajoutant un bit "1" au début de la séquence, de sorte que les "0" initiaux du programme soient significatifs). Donc un programme calcule une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

   L'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

b) Un programme en JAVA est construit à partir d'un nombre fini de symboles et est de longueur fini. On peut donc considérer un programme comme un mot écrit à l'aide d'un certain alphabet.

   L'ensemble de tous les programmes en JAVA est-il dénombrable ?

c) Si on suppose qu'on n'a aucun problème de mémoire, est-ce que n'importe quelle application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ peut-être calculée en JAVA ? (Justifiez brièvement.)

Solution de 4a)

Par le théorème, on obtient directement que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, (l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$) est non dénombrable.

C.Q.F.D.

Solution de 4b)

Comme L'ensemble des symboles utilisables dans un programme JAVA est fini, On a donc que pour chaque $n : \mathbb{N} - \{0\}$, il y a au plus un nombre finis de programmes JAVA de longueur n.

- Soit n_1 le nombre de programmes JAVA de longueur 1.
  Et soient $J_1^1,\ J_2^1,\ \ldots\ J_{n_1}^1$, ces programmes de longueur 1.

- Soit n_2 le nombre de programmes JAVA de longueur 2.
  Et soient $J_1^2,\ J_2^2,\ \ldots\ J_{n_2}^2$, ces programmes de longueur 2.

- Soit n_3 le nombre de programmes JAVA de longueur 3.
  Et soient $J_1^3,\ J_2^3,\ \ldots\ J_{n_2}^3$, ces programmes de longueur 3.

- etc...

Soit $\mathcal{J}$, l'ensemble de tous les programmes JAVA.
Et soit maintenant f, une application bijective de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{J}$, définie en extension de la manière suivante :

$$
\begin{array}{c||ccccccc}
\boxed{\text{Longueur du programme}} & & & & \mathcal{J} & & & \\
1 & \begin{matrix} J_1^1 \\ \uparrow \\ f(0) \end{matrix} & \begin{matrix} J_2^1 \\ \uparrow \\ f(1) \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} J_{n_1}^1 \\ \uparrow \\ f(n_1-1) \end{matrix} & & & \\
2 & \begin{matrix} J_1^2 \\ \uparrow \\ f(n_1) \end{matrix} & \begin{matrix} J_2^1 \\ \uparrow \\ f(n_1+1) \end{matrix} & & \dots & \begin{matrix} J_{n_1}^1 \\ \uparrow \\ f(n_1+n_2-1) \end{matrix} & & \\
3 & \begin{matrix} J_1^3 \\ \uparrow \\ f(n_1+n_2) \end{matrix} & \begin{matrix} J_2^1 \\ \uparrow \\ f(n_1+n_2+1) \end{matrix} & & & \dots & & \begin{matrix} J_{n_1}^1 \\ \uparrow \\ f(n_1+n_2+n_3-1) \end{matrix} \\
\vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Ainsi, il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ vers l'ensemble de tous les programmes JAVA, cet ensemble est donc dénombrable.

C.Q.F.D.

Solution de 4c) Non, parce que si chacune de ces applications était calculables en JAVA, il faudrait qu'il y ait au moins "autant" de programmes JAVA que d'applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Or il existe un nombre **non dénombrable** d'applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, mais seulement un nombre **dénombrable** de programmes JAVA.

Exercice 5 : Expliquez brièvement pourquoi $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

Voir le théorème 3.17 et l'exemple 3.18.

Exercice 6 : Soit l'application f, définie par $f: \begin{array}{ccc} [1,100] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{100} \end{array}$

a) Démontrez que f est injective mais pas surjective.

Solutions :

f est injective.

Comme f est une application, il suffit de montrer :

$$(\forall x, x' : [1,100] \mid f(x) = f(x') : x = x')$$

Soient $x, x' : [1,100]$ choisis tels que $f(x) = f(x')$.

Alors on a $\frac{x-1}{100} = \frac{x'-1}{100}$ $\langle$ Définition de f $\rangle$
Donc $x - 1 = x' - 1$ $\langle$ Propriété de l'arithmétique $\rangle$
Donc $x = x'$ $\langle$ Propriété de l'arithmétique $\rangle$

f est donc une application injective.

C.Q.F.D.

f n'est pas surjective

Comme f est une application, il suffit de montrer :

$$\neg(\forall y : [0,1] \mid: (\exists x : [1,100] \mid: f(x) = y))$$

Ce qui par la loi de DeMorgan (pour le $\forall$) **(7.20)** est équivalent à montrer :

$$(\exists y : [0,1] \mid: \neg(\exists x : [1,100] \mid: f(x) = y))$$

Ce qui par la loi de DeMorgan (pour le $\exists$) **(7.21)(b)** est équivalent à montrer :

$$(\exists y : [0,1] \mid: (\forall x : [1,100] \mid: f(x) \neq y))$$

Soit $y := 1$ $\langle$ Clairement, un tel y existe et appartient à $[0,1]$. $\rangle$
Soit $x : [1,100]$

Alors,

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \frac{x-1}{100} & \langle\text{Définition de } f.\rangle \\ & \leq & \frac{100-1}{100} & \langle\text{Car } f \text{ est un application croissante et } x \leq 100.\rangle \\ & = & \frac{99}{100} & \\ & < & 1 & \end{array}$$

Donc $f(x) \neq 1$ $\langle$ car $f(x) < 1$. $\rangle$
Donc $f(x) \neq y$

f n'est donc pas une application surjective.

C.Q.F.D.

b) Peut-on conclure de a) que $\Big|[1,100]\Big| \leq \Big|[0,1]\Big|$? Pourquoi ?

Solutions :

OUI, voir la définition I.3.2.

c) Peut-on conclure de a) que $\Big|[1,100]\Big| < \Big|[0,1]\Big|$? Pourquoi ?

Solutions :

NON, car ce n'est pas parce que l'application $f\ :\ [1,100] \longrightarrow [0,1]$ n'est pas surjective qu'il **n'existe pas** d'application surjective de $[1,100]$ vers $[0,1]$.

d) Est-ce que [1,100] est dénombrable ? justifiez.

Solutions :

NON.

(1) - Montrons que $\begin{array}{llcl} h\ : & [0,1[& \longrightarrow & [1,100] \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ est une application injective.

Pour montrer que h est une application, il suffit de monter que la règle de correspondance est bien définie, ce qui est clairement le cas car :

- pour chaque élément x de l'ensemble de départ $[0,1[$ il existe **un** et **un seul** élément qui lui correspond, soit l'élément $x+1$,
- et cet élément $x+1$ est bien dans l'ensemble d'arrivée $[1,100]$ si $x \in [0,1[$.

Montrons donc que h est injectif en montrant :

$$(\forall x, x' : [0,1[\ |\ f(x) = f(x')\ :\ x = x')$$

Soient $x, x' : [0,1[$ choisis tels que $f(x) = f(x')$.
Alors $x+1 = x'+1$ ⟨ Définition de h.⟩ Donc $x = x'$ ⟨ Propriété de l'arithmétique.⟩
C.Q.F.D.

h est donc une application injective.

(2) - De (1), on conclu que $\Big|[0,1[\Big| \leq \Big|[1,100]\Big|$.

(3) - Comme dans les notes on a montré que $\Big|\mathbb{N}\Big| < \Big|[0,1[\Big|$.

On a donc que $\Big|\mathbb{N}\Big| < \Big|[0,1[\Big| \leq \Big|[1,100]\Big|$.

$[1,100]$ est donc un ensemble non dénombrable.