MAT-22257 : Exercices Série 5

Réponses et\ou solutions.

Exercice 1 : *(Pour cet exercice, vous pouvez supposer, que la composition de deux applications est encore une application, puisque c'est ce que vous allez montré dans votre devoir#2.)*

Démontrez l'énoncé suivant :

Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ sont deux applications strictement croissantes alors $f \circ g$ est une application strictement croissante.

Rappel : étant donnée une application $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

- h est strictement croissante $\equiv (\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : h(x) < h(x'))$

Démonstration

En supposant	:	$(\star)$	$(\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : f(x) < f(x'))$
et	:	$(\star\star)$	$(\forall y, y' : \mathbb{Z} \mid y < y' : g(y) < g(y'))$
Nous allons démontrer	:		$(\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : f \circ g(x) < f \circ g(x'))$

Soients x, x' : $\mathbb{Z}$ choisis tels que $x < x'$ ⟨*et montrons que* $f \circ g(x) < f \circ g(x')$ *ou autement dit, montrons que* $g(f(x)) < g(f(x'))$. ⟩

Alors, on a $f(x) < f(x')$ ⟨ Voir $(\star)$.⟩

Ce qui implique $g\Big(f(x)\Big) < g\Big(f(x')\Big)$ ⟨ Voir $(\star\star)$, avec $[y := f(x)]$ et $[y' := f(x')]$.⟩

Ce qui est équivalent à $f \circ g(x) < f \circ g(x')$ ⟨ Voir la définition de $\circ$.⟩

$f \circ g$ est donc une application strictement croissante.

C.Q.F.D.

Attention : *notez bien les différences entre cet exercice et l'exercice 3 du Cours4.*

Exercice 2 : *(Pour ce numéro, aucune justification n'est demandée.)*

Étant donnés les ensembles A, B, C et D, que peut-on conclure sur leurs cardinalités ?

a) – il existe une application bijective de A vers C ;
– il existe une application surjective de A vers B ;
– il existe une application injective de A vers D.

Réponse : $|D| \geq |C| = |A| \geq |B|$.

b) – il existe une application bijective de A vers C ;
– il existe une application surjective de A vers B ;
– il existe une application injective de A vers D ;

- il existe une application surjective de B vers D.

Réponse : $|A| = |B| = |C| = |D|$.

c) – il existe une application surjective de A vers B ;
– il existe une application surjective de B vers C ;
– il existe une application surjective de C vers D ;
– il existe une application surjective de D vers $\mathbb{N}$.

Réponse : $|A| \geq |B| \geq |C| \geq |\mathbb{N}|$.
Et donc que A, B et C sont tous trois infinis.

d) – il existe une application surjective de A vers B,
– il existe une application bijective de B vers C,
– il n'existe pas d'application injective de C vers $\mathbb{N}$,

Réponse : $|A| \geq |B| = |C| > |\mathbb{N}|$.
Et donc que A, B et C sont tous trois non dénombrables.

Exercice 3 :

Rappel : *l'ensemble* $\left\{ x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z}^* \;\middle|\; : \frac{x}{y} \right\}$ *est l'ensemble des nombres rationnels et est noté* $\mathbb{Q}$.

a) Démontrez que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est dénombrable en construisant en extension une application bijective.

Solution :

- Démontrons que $\mathbb{Z}^*$ est dénombrable en construisant l'application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^*$ suivante :

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \cdots & f(7) & f(5) & f(3) & f(1) & f(0) & f(2) & f(4) & f(6) & \cdots \end{array}$$

- On sait déjà que $\mathbb{Z}$ est dénombrable (Voir : "Notes sur les ensembles infinis", Exemple I.2.7.)
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est donc dénombrable (Voir : "Notes sur les ensembles infinis", Théorème I.3.12(*2*).)

b) Démontrez que la relation F définie par $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & \langle x, y \rangle & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$ est une application surjective.

Solution :

- $\begin{array}{ccccc} f : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & \langle x, y \rangle & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$ est une appl. surjective, car ...(vous êtes capable de le faire vous-même !)

c) En utilisant a) et b), démontrez que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
Solution :

- De b), on conclu que $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*| \geq |\mathbb{Q}|$.
- De a), on déduit que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*|$
- Donc $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*| \geq |\mathbb{Q}|$.

$\mathbb{Q}$ est donc **dénombrable**.