MAT-22257 : Exercices Série 5

Exercice 1 : *(Pour cet exercice, vous pouvez supposer, que la composition de deux applications est encore une application, puisque c'est ce que vous allez montré dans votre devoir#2.)*

Démontrez l'énoncé suivant :

Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ sont deux applications strictement croissantes alors $f \circ g$ est une application strictement croissante.

Rappel : étant donnée une application $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

- h est strictement croissante $\equiv (\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : h(x) < h(x'))$

Exercice 2 : (*Pour ce numéro, aucune justification n'est demandée.*)

Étant donnés les ensembles A, B, C et D, que peut-on conclure sur leurs cardinalités ?

a) – il existe une application bijective de A vers C ;
 – il existe une application surjective de A vers B ;
 – il existe une application injective de A vers D.

b) – il existe une application bijective de A vers C ;
 – il existe une application surjective de A vers B ;
 – il existe une application injective de A vers D ;
 – il existe une application surjective de B vers D.

c) – il existe une application surjective de A vers B ;
 – il existe une application surjective de B vers C ;
 – il existe une application surjective de C vers D ;
 – il existe une application surjective de D vers $\mathbb{N}$.

d) – il existe une application surjective de A vers B,
 – il existe une application bijective de B vers C,
 – il n'existe pas d'application injective de C vers $\mathbb{N}$,

Exercice 3 :

Rappel : *l'ensemble* $\left\{ x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z}^* \;\middle|\; : \frac{x}{y} \right\}$ *est l'ensemble des nombres rationnels et est noté* $\mathbb{Q}$.

a) Démontrez que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est dénombrable en construisant en extension une application bijective.

b) Démontrez que la relation F définie par $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & \langle x, y \rangle & \longmapsto & \frac{x}{y} \end{array}$ est une application surjective.

c) En utilisant a) et b), démontrez que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.