MAT-22257 : Exercices Série 4

Réponses et\ou solutions.

Exercice 1 :

Montrez que les ensembles suivants sont infinis dénombrables (c.-à-d. : qu'ils ont la même cardinalité que $\mathbb{N}$).
Pour ce numéro, vous pouvez, tout comme dans les notes de cours, donner des définitions en extension de toute application bijective dont le domaine est $\mathbb{N}$, et dans ce cas, vous n'avez pas à démontrer qu'il s'agit effectivement d'une application bijective.

a) $\mathbb{N} \times \{5, 12, 789\}$.

Solution

Pour montrer la dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \{5, 12, 789\}$, nous allons construire une application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \{5, 12, 789\}$, en la définissant en extension de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccc}
\langle 0,5\rangle & \langle 1,5\rangle & \langle 2,5\rangle & \langle 3,5\rangle & \langle 4,5\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
f(0) & f(3) & f(6) & f(9) & f(12) & \\
\\
\langle 0,12\rangle & \langle 1,12\rangle & \langle 2,12\rangle & \langle 3,12\rangle & \langle 4,12\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
f(1) & f(4) & f(7) & f(10) & f(13) & \\
\\
\langle 0,789\rangle & \langle 1,789\rangle & \langle 2,789\rangle & \langle 3,789\rangle & \langle 4,789\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
f(2) & f(5) & f(8) & f(11) & f(14) &
\end{array}$$

On a donc que $\Big|\mathbb{N}\Big| = \Big|\mathbb{N} \times \{5, 12, 789\}\Big|$.

$\mathbb{N} \times \{5, 12, 789\}$ est donc un ensemble (infini) dénombrable.

C.Q.F.D.

b) $\mathbb{N} - \{5, 12, 789\}$.

Solution

Pour montrer la dénombrabilité de $\mathbb{N} - \{5, 12, 789\}$, nous allons construire une application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \{5, 12, 789\}$, en la définissant en extension de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & & 11 & 13 & 14 & & 788 & 790 & 791 & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & & f(10) & f(11) & f(12) & & f(786) & f(787) & f(788) &
\end{array}$$

On a donc que $\Big|\mathbb{N}\Big| = \Big|\mathbb{N} - \{5, 12, 789\}\Big|$.

$\mathbb{N} - \{5, 12, 789\}$ est donc un ensemble (infini) dénombrable.

C.Q.F.D.

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Solution Voir dans les notes de cours.

d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Solution

Pour montrer la dénombrabilité de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
nous allons construire une application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, en la définissant en extension de la manière suivante :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots & \underset{f(36)}{\overset{\langle 3,-3\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(35)}{\overset{\langle 3,-2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(34)}{\overset{\langle 3,-1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(33)}{\overset{\langle 3,0\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(32)}{\overset{\langle 3,1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(31)}{\overset{\langle 3,2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(30)}{\overset{\langle 3,3\rangle}{\uparrow}} & \cdots \\
\cdots & \underset{f(37)}{\overset{\langle 2,-3\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(16)}{\overset{\langle 2,-2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(15)}{\overset{\langle 2,-1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(14)}{\overset{\langle 2,0\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(13)}{\overset{\langle 2,1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(12)}{\overset{\langle 2,2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(29)}{\overset{\langle 2,3\rangle}{\uparrow}} & \cdots \\
\cdots & \underset{f(38)}{\overset{\langle 1,-3\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(17)}{\overset{\langle 1,-2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(4)}{\overset{\langle 1,-1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(3)}{\overset{\langle 1,0\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(2)}{\overset{\langle 1,1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(11)}{\overset{\langle 1,2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(28)}{\overset{\langle 1,3\rangle}{\uparrow}} & \cdots \\
\cdots & \underset{f(39)}{\overset{\langle 0,-3\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(18)}{\overset{\langle 0,-2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(5)}{\overset{\langle 0,-1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(0)}{\overset{\langle 0,0\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(1)}{\overset{\langle 0,1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(10)}{\overset{\langle 0,2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(27)}{\overset{\langle 0,3\rangle}{\uparrow}} & \cdots \\
\cdots & \underset{f(40)}{\overset{\langle -1,-3\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(19)}{\overset{\langle -1,-2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(6)}{\overset{\langle -1,-1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(7)}{\overset{\langle -1,0\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(8)}{\overset{\langle -1,1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(9)}{\overset{\langle -1,2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(26)}{\overset{\langle -1,3\rangle}{\uparrow}} & \cdots \\
\cdots & \underset{f(41)}{\overset{\langle -2,-3\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(20)}{\overset{\langle -2,-2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(21)}{\overset{\langle -2,-1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(22)}{\overset{\langle -2,0\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(23)}{\overset{\langle -2,1\rangle}{\uparrow}} & \underset{24(5)}{\overset{\langle -2,2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(25)}{\overset{\langle -2,3\rangle}{\uparrow}} & \cdots \\
\cdots & \underset{f(42)}{\overset{\langle -3,-3\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(43)}{\overset{\langle -3,-2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(44)}{\overset{\langle -3,-1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(45)}{\overset{\langle -3,0\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(46)}{\overset{\langle -3,1\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(47)}{\overset{\langle -3,2\rangle}{\uparrow}} & \underset{f(48)}{\overset{\langle -3,3\rangle}{\uparrow}} & \cdots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

On a donc que $\Big|\mathbb{N}\Big| = \Big|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\Big|$.

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est donc un ensemble (infini) dénombrable.

C.Q.F.D.

e) l'ensemble de toutes les puissances de 2.

Solution

Pour montrer la dénombrabilité de $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, nous allons construire une application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, en la définissant en extension de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) & \cdots \end{array}$$

On a donc que $\left|\mathbb{N}\right| = \left|\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}\right|$.

$\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est donc un ensemble (infini) dénombrable.

C.Q.F.D.

f) l'ensemble de tous les mots qu'on peut construire avec un alphabet qui soit composé uniquement des lettres "a", "b" et "c".

Solution

Notons par $\mathcal{M}_{a,b,c}$, l'ensemble de tous les mots finis sur l'alphabet $\{$"a", "b", "c"$\}$.
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{M}_{a,b,c}$, une application bijective définie en extension de la manière suivante :

$$\begin{array}{c||cccccccccc} \boxed{\text{Longueur du mot}} & & & & \mathcal{M}_{finis} & & & & & & \\ 0 & \overset{\varepsilon}{\underset{f(0)}{\uparrow}} & & & & & & & & & \\ 1 & \overset{a}{\underset{f(1)}{\uparrow}} & \overset{b}{\underset{f(2)}{\uparrow}} & \overset{c}{\underset{f(3)}{\uparrow}} & & & & & & & \\ 2 & \overset{aa}{\underset{f(4)}{\uparrow}} & \overset{ab}{\underset{f(5)}{\uparrow}} & \overset{ac}{\underset{f(6)}{\uparrow}} & \overset{ba}{\underset{f(7)}{\uparrow}} & \overset{bb}{\underset{f(8)}{\uparrow}} & \overset{bc}{\underset{f(9)}{\uparrow}} & \overset{ca}{\underset{f(10)}{\uparrow}} & \overset{cb}{\underset{f(11)}{\uparrow}} & \overset{cc}{\underset{f(12)}{\uparrow}} & \\ 3 & \overset{aaa}{\underset{f(13)}{\uparrow}} & \overset{aab}{\underset{f(14)}{\uparrow}} & \overset{aac}{\underset{f(15)}{\uparrow}} & \overset{aba}{\underset{f(16)}{\uparrow}} & & & \cdots & & & \overset{ccc}{\underset{f(39)}{\uparrow}} \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & & \end{array}$$

Ainsi, il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{M}_{a,b,c}$,

L'ensemble de tous les mots finis sur l'alphabet $\{$"a", "b", "c"$\}$ est donc dénombrable.

C.Q.F.D.

Exercice 2 :

a) Démontrez que l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \{2,3\}$,

définie par la règle de correspondance $f(i) = \begin{cases} \langle \frac{i}{2}, 2\rangle & \text{si } i \text{ est pair} \\ \langle \frac{i-1}{2}, 3\rangle & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$

est bijective.

Solution :

- Pour montrer que f est une application, il suffit ici de montrer que la règle de correspondance est bien défini, autrement dit qu'à chaque i de l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ correspond **un** et **un seul** élément de l'ensemble d'arrivé $\mathbb{N} \times \{2,3\}$.
  Comme un élément de $\mathbb{N}$ est soit pair soit impair (et jamais les deux en même temps), on a donc
  - si i est pair il y a $\langle \frac{i}{2}, 2\rangle$ qui lui f-correspond, ce qui est bien un élément de l'ensemble d'arrivé et comme alors i n'est pas impair, il ne peut y en avoir d'autre.
  - si i est impair il y a $\langle \frac{i-1}{2}, 3\rangle$ qui lui f-correspond, ce qui est bien un élément de l'ensemble d'arrivé et comme alors i n'est pas pair, il ne peut y en avoir d'autre.

- Comme f est une application, pour montrer que f est surjective, nous allons montrer que

$$(\forall j : \mathbb{N} \times \{2,3\} \mid: (\exists i : \mathbb{N} \mid: f(i) = j))$$

Soit : $j : \mathbb{N} \times \{2,3\}$.
Il y a deux cas à considérer

Cas 1 la deuxième composante de j est un 2.
Alors $j = \langle k, 2\rangle$ pour un certain $k : \mathbb{N}$.
Posons $i := 2k$ $\langle$ un tel i existe et appartient à $\mathbb{N}$, car multiplier par 2 un nombre naturel est un nombre naturel – propriété de l'arithmétique. $\rangle$
Alors $f(i) = f(2k) = \langle \frac{2k}{2}, 2\rangle = \langle k, 2\rangle = j$. $\langle$ Voir la déf. de f, 2k étant un nombre pair. $\rangle$

Cas 2 la deuxième composante de j est un 3.
Alors $j = \langle l, 3\rangle$ pour un certain $l : \mathbb{N}$.
Posons $i := 2l + 1$ $\langle$ un tel i existe et appartient à $\mathbb{N}$, car multiplier par 2 et ajouter 1 à un nombre naturel est un nombre naturel – propriété de l'arithmétique. $\rangle$
Alors $f(i) = f(2l+1) = \langle \frac{(2l+1)-1}{2}, 2\rangle = \langle \frac{2l}{2}, 2\rangle = \langle l, 2\rangle = j$. $\langle$ Voir la déf. de f, 2l+1 étant un nombre impair. $\rangle$

Dans tous les cas, nous avons trouvé un $i : \mathbb{N}$ tel que $f(i) = j$.

C.Q.F.D.

f est donc une application surjective.

b) En déduire que $\mathbb{N} \times \{2,3\}$ est dénombrable.

Solution :

de a), on déduit que $\left|\mathbb{N}\right| = \left|\mathbb{N} \times \{2,3\}\right|$.
$\mathbb{N} \times \{2,3\}$ est donc (infini) dénombrable.

Exercice 3 :*(Pour cet exercice, vous pouvez supposer, que la composition de deux applications est encore une application, puisque c'est ce que vous allez montré dans votre devoir#2.)*

Démontrez l'énoncé suivant :

Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ sont deux applications strictement décroissantes alors $f \circ g$ est une application strictement croissante.

Rappel : étant donnée une application $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

- h est strictement croissante $\equiv (\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : h(x) < h(x'))$
- h est strictement décroissante $\equiv (\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : h(x) > h(x'))$

Démonstration

En supposant	:	$(\star)$	$(\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : f(x) > f(x'))$
et	:	$(\star\star)$	$(\forall y, y' : \mathbb{Z} \mid y < y' : g(y) > g(y'))$
Nous allons démontrer	:		$(\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : f \circ g(x) < f \circ g(x'))$

Soient $x, x' : \mathbb{Z}$ choisis tels que $x < x'$ $\langle$*et montrons que* $f \circ g(x) < f \circ g(x')$ *ou autement dit, montrons que* $g(f(x)) < g(f(x'))$. $\rangle$

Alors, on a $f(x) > f(x')$ $\langle$ Voir $(\star)$.$\rangle$
Ce qui est équivalent à $f(x') < f(x)$
Ce qui implique $g\Big(f(x')\Big) > g\Big(f(x)\Big)$ $\langle$ Voir $(\star\star)$, avec $[y := f(x')]$ et $[y' := f(x)]$.$\rangle$
Ce qui est équivalent à $f \circ g(x') > f \circ g(x)$ $\langle$ Voir la définition de $\circ$.$\rangle$
Ce qui est équivalent à $f \circ g(x) < f \circ g(x')$

$f \circ g$ est donc une application strictement croissante.

C.Q.F.D.