MAT-22257 : Exercices Série 4

***Rappel :** à moins de spécifications contraires, vous devez* **toujours pleinement justifier** *vos réponses.*

Exercice 1 :

Montrez que les ensembles suivants sont infinis dénombrables (c.-à-d. : qu'ils ont la même cardinalité que $\mathbb{N}$).

Pour ce numéro, vous pouvez, tout comme dans les notes de cours, donner des définitions en extension de toute application bijective dont le domaine est $\mathbb{N}$, et dans ce cas, vous n'avez pas à démontrer qu'il s'agit effectivement d'une application bijective.

a) $\mathbb{N} \times \{5, 12, 789\}$.

b) $\mathbb{N} - \{5, 12, 789\}$.

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

e) l'ensemble de toutes les puissances de 2.

f) l'ensemble de tous les mots qu'on peut construire avec un alphabet qui soit composé uniquement des lettres "a", "b" et "c".

Exercice 2 :

a) Démontrez que l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \{2, 3\}$,

définie par la règle de correspondance $f(i) = \begin{cases} \langle \frac{i}{2}, 2\rangle & \text{si } i \text{ est pair} \\ \langle \frac{i-1}{2}, 3\rangle & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$

est bijective :

b) En déduire que $\mathbb{N} \times \{2, 3\}$ est dénombrable.

Exercice 3 :*(Pour cet exercice, vous pouvez supposer, que la composition de deux applications est encore une application, puisque c'est ce que vous allez montré dans votre devoir#2.)*

Démontrez l'énoncé suivant :

Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ sont deux applications strictement décroissantes alors $f \circ g$ est une application strictement croissante.

Rappel : étant donnée une application $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

- h est strictement croissante $\equiv (\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : h(x) < h(x'))$
- h est strictement décroissante $\equiv (\forall x, x' : \mathbb{Z} \mid x < x' : h(x) > h(x'))$

Exercice 4 :*(Pour fin de réflexion et de discussions)*

Paradoxe de Bertrand Russel : Séparons les ensembles en deux catégories : un ensemble X appartient à la catégorie **(1)** si $X \in X$ et à la catégorie **(2)** sinon. Par exemple, l'ensemble de tous les ensembles est de catégorie **(1)** puisqu'il est un élément de lui-même.

L'ensemble des ensembles de catégorie **(2)** est dans quelle catégorie ?