# MAT-22257 : Exercices Série 3

## *Réponses et\ou solutions.*

**Exercice 3 :** *(Pour cet exercice, aucune réponse n'a à être justifiée.)*
Dites si chacune des relations suivantes est ($i$) déterministe, ($ii$) totale, ($iii$) injective, ($iv$) surjective, ($v$) une application, ($vi$) une application injective, ($vii$) une application surjective ou ($viii$) une application bijective.

**a)** $\rho = \{i, j : \mathbb{R} \mid i + 1 = j : \langle i, j \rangle\}$ ;

**Réponse :** $\rho$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est bijective (c.-à-d. : injective et surjective).

**b)** $\sigma = \{i, j : \mathbb{N} \mid i + 1 = j : \langle i, j \rangle\}$ ;

**Réponse :** $\sigma$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est injective mais pas surjective (et donc pas bijective).

**c)** $\theta = \{i, j : \mathbb{N} \mid i - 1 = j : \langle i, j \rangle\}$ ;

**Réponse :** $\theta$ est une relation déterministe mais pas totale (et donc pas une application) qui est bijective (c.-à-d. : injective et surjective).

**d)** $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $d.x = x^2$ ;

**Réponse :** $d$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est ni injective ni surjective (et donc pas bijective).

**e)** la relation inverse de la relation $d$ définie en d) ;

**Réponse :** $d^{-1}$ est une relation qui est ni déterministe, ni totale (et donc pas une application) mais qui est injective et surjective (et donc bijective).

**f)** $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $f.x = x^2$ ;

**Réponse :** $f$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est injective mais pas surjective (et donc pas bijective).

**g)** $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par la règle de correspondance : $g.x = x^2$ ;

**Réponse :** $g$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est injective et surjective (et donc bijective).

**h)** $h : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, définie par la règle de correspondance : $h.x = sin(x)$ ;

**Réponse :** $f$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est surjective mais pas injective (et donc pas bijective).

**i)** $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $i.x = x^3$ ;

**Réponse :** $i$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est injective et surjective (et donc bijective).

**j)** la relation inverse de la relation $i$ définie en i) ;

**Réponse :** $i^{-1}$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est injective et surjective (et donc bijective).
*Notez que la relation inverse d'une application bijective est toujours elle aussi une application bijective.*

**k)** $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par la règle de correspondance : $k.x = 2^x$ ;

**Réponse :** $k$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est injective et surjective (et donc bijective).

**l)** $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par la règle de correspondance : $l.x = log_2(x)$ ;

**Réponse :** $l$ n'est pas bien défini, car la règle de correspondance $l.x = log_2(x)$ qui la définie n'a pas de sens pour les valeurs de $x \leq 0$,
on ne peut donc pas répondre à cette question.

**m)** $m : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $m.x = log_2(x)$.

**Réponse :** $f$ est une application (c.-à-d. : une relation déterministe et totale) qui est injective et surjective (et donc bijective).
*Notez que,* $m = k^{-1}$

## Exercice 4 :(*Pour ce numéro, seuls le c) et le e) nécessitent quelques justifications et vous pouvez définir toute relation par une représentation graphique.*)

**a)** Construisez une relation $\rho \subseteq A \times B$ qui soit une application bijective.

**b)** Construisez une relation $\theta \subseteq C \times D$ qui ne soit ni totale, ni déterministe, ni injective, ni surjective.

**c)** Dans votre réponse en a), est-ce que $|A| = |B|$ ? Si oui, recommencez la question a) de telle sorte que $|A| \neq |B|$. Si vous n'y arrivez pas, expliquez pourquoi.

**d)** Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Construisez une application $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.

**e)** À partir de l'application $f$ que vous avez fabriqué en d), construisez l'ensemble $T := \{e : E \mid e \notin f(e)\}$.

**e)** Étant donné le $f$ et le $T$ que vous avez construits, est-ce que $T$ appartient à l'ensemble d'arrivée de $f$ ?

**f)** Étant donné le $f$ et le $T$ que vous avez construits, est-ce que $T \in \text{Ima}.f$ ?
Si vous avez répondu non, refaites les numéro d) et e) de telle sorte que $T \in \text{Ima}.f$. Si vous n'y arrivez pas, expliquez brièvement pourquoi.

***Solutions à venir***

## Exercice 5 :(*Pour cet exercice, toute réponse doit être pleinement justifiée.*)

Étant données les cinq relations suivantes :

- $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, définie par : $\rho = \{i, j | i + 1 = j : \langle i, j \rangle\}$
- $\theta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, définie par : $\theta = \{x, y | (\exists z : \mathbb{Z} | : 2z = x - y) : \langle x, y \rangle\}$
- $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, définie par la règle de correspondance : $f.x = x + 3$

– $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, définie par la règle de correspondance : $g.x = x + 3$
– $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, définie par la règle de correspondance : $h.x = x^2$

**A)** Pour chacune d'elle, déterminez si oui ou non, il s'agit :

**1)** d'une fonction (c.-à-d. : déterministe) ;

**2)** d'une application (c.-à-d. : déterministe et totale) ;

**3)** d'une application injective (c.-à-d. : déterministe, totale et injective) ;

**4)** d'une application surjective (c.-à-d. : déterministe, totale et surjective) ;

**5)** d'une application bijective (c.-à-d. : déterministe, totale, injective et surjective) ;

**B)** Donnez l'application inverse de chacune des applications bijectives trouvées en A5).

## Solutions :

[**(1) – pour** $\rho$] (*Intuitivement, $\rho$ semble être une relation déterministe.*)

Démontrons donc que $(\forall b, c, c' | b\rho c \wedge b\rho c' : c = c')$.

Soient $b$, $c$, $c'$ choisis tels que $b\rho c$ et $b\rho c'$. $\langle$*et montrons que $c = c'$.* $\rangle$

Comme $b\rho c$, alors par la définition de $\rho$, on a $c = b + 1$.

Comme $b\rho c'$, alors par la définition de $\rho$, on a $c' = b + 1$.

Donc, par la transitivité de $=$, on a $c = c'$.

C.Q.F.D.

$\rho$ est donc une relation déterministe.

[**(2) – pour** $\rho$] (*Intuitivement, $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ semble être une relation totale.*)

Démontrons donc que $(\forall b : \mathbb{N}| : (\exists c : \mathbb{N}| : b\rho c))$

Soit $b : \mathbb{N}$.

Soit c :=b+1. $\langle$*Un tel c existe et appartient à $\mathbb{N}$, propriété de l'arithmétique.* $\rangle$

Alors, on a bien $b\rho c$. $\langle$*Définition de $\rho$.* $\rangle$

C.Q.F.D.

$\rho$ est donc une relation totale et comme elle est aussi déterministe (Voir [(1)– pour $\rho$]), $\rho$ est donc une application.

[**(3) – pour** $\rho$] (*On a déjà montré en (1) et (2) que $\rho$ est une application, et intuitivement, elle semble être injective.*)

Comme $\rho$ est une application nous allons démontrer : $(\forall x, x' : \mathbb{N}| \, \rho(x) = \rho(x') : x = x')$.

Soient $x, x' : \mathbb{N}$ choisis tels que $\rho(x) = \rho(x')$.

Alors on a $x + 1 = x' + 1$. $\langle$ *Définition de $\rho$.* $\rangle$

Alors on a $x + 1 - 1 = x' + 1 - 1$. $\langle$ *Propriété de l'arithmétique.* $\rangle$

Alors on a $x = x'$. $\langle$ *Propriété de l'arithmétique.* $\rangle$

C.Q.F.D.

$\rho$ est bien une application injective.

$\left[\textbf{(4) – pour } \rho\right]$ *(On a déjà montré en (1) et (2) que $\rho$ est une application, et intuitivement, elle semble ne pas être surjective, car 0 ne semble pas faire partie de l'image de $\rho$.)*

Comme $\rho$ est une application, nous devons donc démontrer : $\neg(\forall y : \mathbb{N}| : (\exists x : \mathbb{N}| : \rho(x) = y))$

Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists y : \mathbb{N}| : \neg(\exists x : \mathbb{N}| : \rho(x) = y))$. $\langle$ *Voir* $(7.25c)$*, Axiome, De Morgan.* $\rangle$

Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists y : \mathbb{N}| : (\forall x : \mathbb{N}| : \rho(x) \neq y))$. $\langle$ *Voir* $(7.25)(b)$*, De Morgan et* $(* * **)$*, définition de* $\neq$*.* $\rangle$

Démontrons donc $(\exists y : \mathbb{N}| : (\forall x : \mathbb{N}| : \rho(x) \neq y))$.

Soit $y := 0$. $\langle$ *Un tel* $y$ *existe car clairement* $0 : \mathbb{N}$*.* $\rangle$

Soit $x : \mathbb{N}$.

Alors clairement, $\rho(x) = x + 1 \neq 0$. $\langle$ *Car si* $x : \mathbb{N}$ *alors* $x + 1 > 0$ *et donc* $x + 1 \neq 0$ *– propriété de l'arithmétique.* $\rangle$

C.Q.F.D.

$\rho$ n'est pas une application surjective.

$\left[\textbf{(5) – pour } \rho\right]$ $\rho$ n'est pas une application bijective parce qu'elle n'est pas surjective.

$\left[\textbf{(1) – pour } \theta\right]$ *(Intuitivement, $\theta$ semble ne pas être une relation déterministe.)*

Nous devons donc démontrer que $\neg(\forall b, c, c'|b\theta c \wedge b\theta c' : c = c')$

Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists b, c, c'|b\theta c \wedge b\theta c' : \neg(c = c'))$. $\langle$ *Voir* $(7.25c)$*, Axiome, De Morgan.* $\rangle$

Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists b, c, c'|b\theta c \wedge b\theta c' \wedge c \neq c')$. $\langle$ *Voir* $(7.26)$*, Transfert pour* $\exists$ $\rangle$

Démontrons donc que $(\exists b, c, c'|b\theta c \wedge b\theta c' \wedge c \neq c')$.

Soient $b := 2$, $c := 4$, $c' := 6$ $\langle$ *Clairement, de tels* $b$*,* $c$ *et* $c'$ *existent et appartiennent à* $\mathbb{Z}$*.* $\rangle$

Alors on a bien que $b\theta c$. $\langle$ *Car* $2 \times -1 = 2 - 4$*, et -1 appartient à* $\mathbb{Z}$*– Définition de* $\theta$*.* $\rangle$

Et que $b\theta c'$. $\langle$ *Car* $2 \times -2 = 2 - 6$*, et -2 appartient à* $\mathbb{Z}$*– Définition de* $\theta$*.* $\rangle$

Et que $c \neq c'$. $\langle$ *Car* $4 \neq 6$*.* $\rangle$

C.Q.F.D.

$\theta$ n'est donc pas une relation déterministe.

$\left[\textbf{(2), (3), (4) et (5) – pour } \theta\right]$ Comme $\theta$ n'est pas déterministe, elle n'est donc pas une application. La réponse est donc négative pour (2), (3), (4) et (5).

$\left[\textbf{(1) et (2) – pour } f\right]$ *$f$ est nécessairement une application (à moins d'une erreur faite par le professeur dans l'énoncé) puisque c'est ce que signifie la notation $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. )*

$\left[\textbf{(3) – pour } f\right]$ *(Intuitivement, $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ semble être une application injective.)*

Comme $f$ est une application nous allons démontrer : $(\forall x, x' : \mathbb{Z} | f(x) = f(x') : x = x')$.

Soient $x, x' : \mathbb{Z}$, choisis tels que $f(x) = f(x')$.
Alors on a $x + 3 = x' + 3$. ⟨ *Définition de $f$.* ⟩
Alors on a $x + 3 - 3 = x' + 3 - 3$. ⟨ *Propriété de l'arithmétique.* ⟩
Alors on a $x = x'$. ⟨ *Propriété de l'arithmétique.* ⟩

C.Q.F.D.

$f$ est bien une application injective.

$\left[\textbf{(4) – pour } f\right]$ *(On a déjà montré en (1) et (2) que $f$ est une application, et intuitivement, elle semble être surjective.)*

Comme $f$ est une application nous allons démontrer : $(\forall y : \mathbb{Z} | : (\exists x : \mathbb{Z} | : f(x) = y))$.

Soit $y : \mathbb{Z}$.
Soit $x := y - 3$. ⟨ *Un tel $x$ existe et appartient à $\mathbb{Z}$ – Propriété de l'arithmétique.* ⟩
Alors on a $f(x) = f(y - 3) = (y - 3) + 3 = y$.

C.Q.F.D.

$\left[\textbf{(5) – pour } f\right]$ Comme $f$ est une application injective et surjective, elle est donc une application bijective.

$\left[\textbf{(1), (2) et (3) – pour } g\right]$ De façon très similaire à ce qui a été fait pour $f$, on peut montrer que $g$ est une application injective.

$\left[\textbf{(4) – pour } g\right]$ *(Intuitivement $g$ semble ne pas être surjective, car ni 0, ni 1, ni 2 ne semblent faire partie de l'image de $g$.)*

Comme $g$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$,
nous devons donc démontrer : $\neg(\forall y : \mathbb{N} | : (\exists x : \mathbb{N} | : g(x) = y))$
Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists y : \mathbb{N} | : \neg(\exists x : \mathbb{N} | : g(x) = y))$. ⟨ *Voir $(7.25)(c)$, Axiome, De Morgan* ⟩
Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists y : \mathbb{N} | : (\forall x : \mathbb{N} | : g(x) \neq y))$. ⟨ *Voir $(7.25)(b)$, De Morgan et $(* * **)$, définition de $\neq$* ⟩

Démontrons donc $(\exists y : \mathbb{N} | : (\forall x : \mathbb{N} | : g(x) \neq y))$.
Soit $y := 0$. ⟨ *Un tel $b$ existe car clairement $0 : \mathbb{N}$.* ⟩
Soit $x : \mathbb{N}$.
Alors clairement, $g(x) = x + 3 \neq 0$. ⟨ *Car si $x : \mathbb{N}$ alors $x + 3 > 0$ et donc $x + 3 \neq 0$ – propriété de l'arithmétique.* ⟩

C.Q.F.D.

$g$ n'est pas une application surjective.

$\left[\textbf{(5) – pour } g\right]$ $g$ n'est pas une application bijective parce qu'elle n'est pas surjective.

$\left[\textbf{(1) et (2) – pour } h\right]$ *$h$ est nécessairement une application (à moins d'une erreur faite par le professeur dans l'énoncé) puisque c'est ce que signifie la notation $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.* )

$\left[\textbf{(3) – pour } h\right]$ (*Intuitivement, $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ semble ne pas être une application injective.*)

Comme $h$ est une application nous devons donc démontrer : $\neg(\forall x, x' : \mathbb{Z} | h(x) = h(x') : x = x')$.
Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists x, x' : \mathbb{Z} | h(x) = h(x') : x \neq x')$. $\langle$ *Voir* $(7.25)(c)$, Axiome, De Morgan et $(****)$, définition de $\neq$. $\rangle$
Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists x, x' : \mathbb{Z} | h(x) = h(x') : x \neq x')$. $\langle$ *Voir* **(****)**, Définition de $\neq$ $\rangle$
Démontrons donc $(\exists x, x' : \mathbb{Z} | h(x) = h(x') : x \neq x')$.
Soient $x := 2$ et $x' := -2$. $\langle$ *De tels $x$ et $x'$ existent et appartiennent à $\mathbb{Z}$ – Propriété de l'arithmétique.* $\rangle$
Alors on a bien que $h(x) = h(2) = 2^2 = (-2)^2 = h(-2) = h(x')$.

C.Q.F.D.

$h$ n'est pas une application injective.

$\left[\textbf{(4) – pour } h\right]$ (*Intuitivement, $h$ semble ne pas être surjective, car les entiers négatifs ne semble pas être dans l'image de $h$.*)

Comme $h$ est une application nous devons donc démontrer : $\neg(\forall y : \mathbb{Z} | : (\exists x : \mathbb{Z} | : h(x) = y))$
Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists y : \mathbb{Z} | : \neg(\exists x : \mathbb{Z} | : h(x) = y))$. $\langle$ *Voir* **(7.25)(c)**, Axiome, De Morgan $\rangle$
Ce qui est équivalent à démontrer $(\exists y : \mathbb{Z} | : (\forall x : \mathbb{Z} | : h(x) \neq y))$. $\langle$ *Voir* **(7.25)(b)**, De Morgan et (****), définition de $\neq$ $\rangle$
Démontrons donc $(\exists y : \mathbb{Z} | : (\forall x : \mathbb{Z} | : h(x) \neq y))$.
Soit $y := -1$. $\langle$ *Un tel $y$ existe car clairement $-1 \in \mathbb{Z}$.* $\rangle$
Soit $x : \mathbb{Z}$
Alors clairement, $h(x) = x^2 \geq 0$ $\langle$ *Car si $x : \mathbb{Z}$ alors $x^2 \geq 0$ – propriété de l'arithmétique.* $\rangle$
On a donc que $g(x) \neq -1$.

C.Q.F.D.

$h$ n'est pas une application surjective.

$\left[\textbf{(5) – pour } h\right]$ Comme $h$ n'est ni une application injective ni une application surjective, elle n'est donc pas une application bijective.

**B)** Donnez l'application inverse de chacune des applications bijectives trouvées en A5).
Seule $f$ est une application bijective.

**Solution 1 :** Par un théorème vu au cours, comme $f$ est une application bijective, on a que l'inverse de $f$ est exactement : $f^{-1} = \{\langle f(x), x\rangle | x \in \mathbb{Z}\}$.
C'est-à-dire que $f^{-1} = \{\langle x + 3, x\rangle | x \in \mathbb{Z}\}$.
C'est-à-dire que $f^{-1} = \{\langle (y - 3) + 3, (y - 3)\rangle | (y - 3) \in \mathbb{Z}\}$.

C'est-à-dire que $f^{-1} = \{\langle y, y-3\rangle | (y-3) \in \mathbb{Z}\}$. $\langle$ *Propriété de l'arithmétique.* $\rangle$
C'est-à-dire que $f^{-1} = \{\langle y, y-3\rangle | y \in \mathbb{Z}\}$. $\langle$ *Car* $(y-3) \in \mathbb{Z} \equiv y \in \mathbb{Z}$ *– propriété de l'arithmétique.* $\rangle$

**Réponse :** L'application inverse de $f$ est $f^{-1} = \{\langle y, y-3\rangle | y \in \mathbb{Z}\}$.

**Solution 2 :** Soit $k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, défini par la règle de correspondance $k(x) = x - 3$.

Démontrons que $k$ est l'application inverse de $f$.

**A.** $k$ est une application.

Il faut ici démontrer que la règle de correspondance de $k$ est bien définie.

1. $k$ est déterministe car pour chaque $x : \mathbb{Z}$ (*l'ensemble de départ*), on a **au plus** un élément en $k$-relation avec $x$, soit l'élément $x - 3$ (à condition bien sûr que ce $x - 3$ est bien dans $\mathbb{Z}$(*l'ensemble d'arrivée*).
2. Et comme les propriétés de l'arithmétique nous permettent de déduire que ($x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 3 \in \mathbb{Z}$, on a donc **également** que $k$ est total.
   $\langle$ Car pour chaque $x : \mathbb{Z}$ (*l'ensemble de départ*),on a **au moins** un $y \in \mathbb{Z}$ (*l'ensemble d'arrivée*) qui est en $k$-relation avec $x$. $\rangle$

**B.** $k \circ f = \mathbf{I}_{\text{Dom.}f}$ .

Il faut ici démontrer que $(\forall x : \text{Dom.}f | h \circ f(x) = \mathbf{I}_{\text{Dom.}f}(x))$.
Soit $x$ : Dom.$k$.
Alors on a que $x \in \mathbb{Z}$. $\langle$ Car Dom.$f = \mathbb{Z}$.$\rangle$
On a donc $f \circ k(x) = k(f(x)) = k(x+3) = (x+3) - 3 = x = \mathbf{I}_{\text{Dom.}f}(x)$. C.Q.F.D.

**C.** $k \circ f = \mathbf{I}_{\text{Dom.}k}$ .

Il faut ici démontrer que $(\forall y : \text{Dom.}k | h \circ f(y) = \mathbf{I}_{\text{Dom.}k}(y))$.
Soit $y$ : Dom.$k$.
Alors on a que $y \in \mathbb{Z}$. $\langle$ Car Dom.$k = \mathbb{Z}$.$\rangle$
On a donc $k \circ f(y) = f(k(y)) = f(y-3) = (y-3) + 3 = y = \mathbf{I}_{\text{Dom.}k}(y)$. C.Q.F.D.

$k$ est bien l'application inverse de $f$.

# Exercice 6 :

**a)** Vous venez de faire une preuve "classique" où vous avez montré qu'un élément quelconque d'un ensemble X est aussi élément d'un ensemble Y. Écrivez la phrase logique que vous venez de démontrer.

**Réponse :** $X \subseteq Y$.

**b)** Étant donnés deux ensembles A et B. En vous inspirant du numéro a), expliquez comment "classiquement" on démontrerait l'énoncé : A=B.

**Réponse :** Une façon de faire serait de d'abord démontrer que $A \subseteq B$ (*en démontrant qu'un élément quelconque de l'ensemble A est aussi élément de l'ensemble B*) et ensuite de démontrer que $B \subseteq A$ (*en démontrant qu'un élément quelconque de l'ensemble B est aussi élément de l'ensemble A*).

**c)** Étant donné deux ensembles U et V. Vous venez de faire une preuve “classique” où vous avez montré qu’un élément quelconque de l’ ensemble V est aussi élément d’un ensemble U. Puis vous avez montré qu’il existe un élément de l’ensemble U qui n’appartient pas à l’ensemble V. Écrivez la phrase logique que vous venez de démontrer.

**Réponse :** $V \subset U$.