MAT-22257 : Exercices Série 3

Exercice 1 : Notes de cours Section 12.6 : Exercices : 1-2-10-13.

Exercice 2 : Lire le fascicule : *Notes complémentaires et exemples de démonstrations de type "classique"*

Exercice 3 :(*Pour cet exercice, aucune réponse n'a à être justifiée.*)
Dites si chacune des relations suivantes est (i) déterministe, (ii) totale, (iii) injective, (iv) surjective, (v) une application, (vi) une application injective, (vii) une application surjective ou $(viii)$ une application bijective.

- **a)** $\rho = \{i, j : \mathbb{R} \mid i + 1 = j : \langle i, j \rangle\}$;
- **b)** $\sigma = \{i, j : \mathbb{N} \mid i + 1 = j : \langle i, j \rangle\}$;
- **c)** $\theta = \{i, j : \mathbb{N} \mid i - 1 = j : \langle i, j \rangle\}$;
- **d)** $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $d.x = x^2$;
- **e)** la relation inverse de la relation d définie en d) ;
- **f)** $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $f.x = x^2$;
- **g)** $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par la règle de correspondance : $g.x = x^2$;
- **h)** $h : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, définie par la règle de correspondance : $h.x = sin(x)$;
- **i)** $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $i.x = x^3$;
- **j)** la relation inverse de la relation i définie en i) ;
- **k)** $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par la règle de correspondance : $k.x = 2^x$;
- **l)** $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par la règle de correspondance : $l.x = log_2(x)$;
- **m)** $m : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $m.x = log_2(x)$.

Exercice 4 :(*Pour ce numéro, seuls le c) et le e) nécessitent quelques justifications et vous pouvez définir toute relation par une représentation graphique.*)

- **a)** Construisez une relation $\rho \subseteq A \times B$ qui soit une application bijective.
- **b)** Construisez une relation $\theta \subseteq C \times D$ qui ne soit ni totale, ni déterministe, ni injective, ni surjective.
- **c)** Dans votre réponse en a), est-ce que $|A| = |B|$? Si oui, recommencez la question a) de telle sorte que $|A| \neq |B|$. Si vous n'y arrivez pas, expliquez pourquoi.
- **d)** Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Construisez une application $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$.
- **e)** À partir de l'application f que vous avez fabriqué en d), construisez l'ensemble $T := \{e : E \mid e \notin f(e)\}$.
- **e)** Étant donné le f et le T que vous avez construits, est-ce que T appartient à l'ensemble d'arrivée de f ?
- **f)** Étant donné le f et le T que vous avez construits, est-ce que $T \in \text{Ima}.f$?
  Si vous avez répondu non, refaites les numéro d) et e) de telle sorte que $T \in \text{Ima}.f$. Si vous n'y arrivez pas, expliquez brièvement pourquoi.

Exercice 5 :(*Pour cet exercice, toute réponse doit être pleinement justifiée.*)

Étant données les cinq relations suivantes :

- $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, définie par : $\rho = \{i, j | i + 1 = j : \langle i, j\rangle\}$
- $\theta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, définie par : $\theta = \{x, y | (\exists z : \mathbb{Z}| : 2z = x - y) : \langle x, y\rangle\}$
- $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, définie par la règle de correspondance : $f.x = x + 3$
- $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, définie par la règle de correspondance : $g.x = x + 3$
- $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, définie par la règle de correspondance : $h.x = x^2$

A) Pour chacune d'elle, déterminez si oui ou non, il s'agit :

1) d'une fonction (c.-à-d. : déterministe) ;

2) d'une application (c.-à-d. : déterministe et totale) ;

3) d'une application injective (c.-à-d. : déterministe, totale et injective) ;

4) d'une application surjective (c.-à-d. : déterministe, totale et surjective) ;

5) d'une application bijective (c.-à-d. : déterministe, totale, injective et surjective) ;

B) Donnez l'application inverse de chacune des applications bijectives trouvées en A5).

Exercice 6 :

a) Vous venez de faire une preuve "classique" où vous avez montré qu'un élément quelconque d'un ensemble X est aussi élément d'un ensemble Y. Écrivez la phrase logique que vous venez de démontrer.

b) Étant donnés deux ensembles A et B. En vous inspirant du numéro a), expliquez comment "classiquement" on démontrerait l'énoncé : A=B

c) Étant donné deux ensembles U et V. Vous venez de faire une preuve "classique" où vous avez montré qu'un élément quelconque de l' ensemble V est aussi élément d'un ensemble U. Puis vous avez montré qu'il existe un élément de l'ensemble U qui n'appartient pas à l'ensemble V. Écrivez la phrase logique que vous venez de démontrer.

Exercice 7 : (***Pour fin de réflexion et de discussions***)

Une charrue enlève la neige le long d'une route qui s'étend jusqu'à l'infini. Tout au long de la route, il y a 15cm de neige. La pelle de la charrue laisse écouler un quinzième de la neige qui entre dans sa pelle (c.-à-d. : 1cm de neige sur les 15). Supposant que la pelle a une capacité infinie et que les flocons qu'elle laisse écouler sortent selon un principe "first in, first out", quelle quantité de neige restera dans la pelle une fois le travail terminé ?

Exercice 8 : (***Pour fin de réflexion et de discussions***)

Vous avez deux ensembles infinis, comment savoir lequel des deux a le plus grand nombre d'éléments ?