# MAT-22257 : Exercices Série 2

## *Réponses et\ou solutions.*

**Exercice 2 :** Illustrez si possible chacune des propriétés ci-dessous à l'aide de diagramme de Venn et donnez-en une démonstration formelle :

**(11.9)** $S = \{x|x \in S : x\}$

**(11.49)** Distributivité de $\cap$ sur $\cup$ : $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$

**(11.53)** $S \subseteq T \equiv S \cup T = T$

**(11.57)** $S - T = S \cap \sim T$

**(11.64)** $(\forall x| : P \Rightarrow Q) \equiv \{x|P\} \subseteq \{x|Q\}$

***Solutions* :** (*Pour ce qui est des diagramme de Venn, vous pouvez les faire vous-mêmes.*)

**(11.9)** $S = \{x|x \in S : x\}$

Nous utiliserons la méthode de démonstration (11.18)b qui ramène ce problème à la démonstration de $v \in S \equiv v \in \{x \mid x \in S : x\}$.

$v \in \{x \mid x \in S : x\}$
$= \langle$(11.6) — Appartenance, cas particulier, avec $[F := v]$, $[x := x]$ et $[R := x \in S]\rangle$
$v \in S[x := v]$
$=$
$v \in S$

C.Q.F.D.

**(11.49)** Distributivité de $\cap$ sur $\cup$ : $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$

Nous utiliserons la méthode de démonstration (11.18)b qui ramène ce problème à la démonstration de $v \in S \cap (T \cup U) \equiv v \in (S \cap T) \cup (S \cap U)$.

$v \in S \cap (T \cup U)$
$= \langle$(11.29) — Axiome, intersection, avec $[S := S]$ et $[T := T \cup U]\rangle$
$v \in S \ \wedge \ v \in T \cup U$
$= \langle$(11.28) — Axiome, union, avec $[S := T]$ et $[T := U]\rangle$
$v \in S \ \wedge \ (v \in T \ \vee \ v \in U)$
$= \langle$(3.60) — Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$, avec $[p := v \in S]$, $[q := v \in T]$ et $[r := v \in U]\rangle$
$(v \in S \wedge v \in T) \ \vee \ (v \in S \wedge v \in U)$
$= \langle$(11.29) — Axiome, intersection (2 fois),
1$^{\text{ère}}$ fois avec $[S := S]$ et $[T := T]$, 2$^{\text{e}}$ fois avec $[S := S]$ et $[T := U]\rangle$
$(v \in S \cap T) \ \vee \ (v \in S \cap U)$
$= \langle$(11.28) — Axiome, union, avec $[S := S \cap T]$ et $[T := S \cap U]\rangle$
$v \in (S \cap T) \cup (S \cap U)$

C.Q.F.D.

**(11.53)** $S \subseteq T \equiv S \cup T = T$

$S \subseteq T$
$= \langle$(11.21) — Axiome du sous-ensemble$\rangle$
$(\forall x \mid x \in S : x \in T)$
$= \langle$(7.3) — Axiome de transfert, avec $[R := x \in S]$ et $[P := x \in T]\rangle$
$(\forall x \mid: x \in S \Rightarrow x \in T)$
$= \langle$(3.73) — Axiome définition de $\Rightarrow$, avec $[p := x \in S]$ et $[q := x \in T]\rangle$
$(\forall x \mid: x \in S \vee x \in T \equiv x \in T)$
$= \langle$(11.28) — Axiome d'union, avec $[v := x]\rangle$
$(\forall x \mid: x \in S \cup T \equiv x \in T)$
$= \langle$(11.8) — Axiome d'extensionalité, avec $[S := S \cup T]$ et $[T := T]\rangle$
$S \cup T = T$

C.Q.F.D.

**(11.57)** $S - T = S \cap \sim T$

Pour faire cet exercice, nous devons supposer l'existence d'un Ensemle universel **U**.

Nous utiliserons la méthode de démonstration (11.18)b qui ramène ce problème à la démonstration de $v \in S - T \equiv v \in S \cap \sim T$ où $v \in$ **U**.

$v \in S - T$
$= \langle$(11.30) — Axiome, différence$\rangle$
$v \in S \wedge v \notin T$
$= \langle$(11.26) — avec $[S := T]$ et $[v := v]$, **car v** $\in$ **U** $\rangle$
$v \in S \wedge v \in \sim T$
$= \langle$(11.29) — Axiome, intersection, avec $[S := S], [T := \sim T]$ et $[v := v]\rangle$
$v \in S \cap \sim T$

C.Q.F.D.

**(11.64)** $(\forall x \mid : P \Rightarrow Q) \equiv \{x|P\} \subseteq \{x|Q\}$

$\{x|P\} \subseteq \{x|Q\}$
$= \langle$(11.21) — Axiome, sous-ensemble, avec $[S := \{x|P\}]$ et $[T := \{x|Q\}]\rangle$
$(\forall x \mid x \in \{x|P\} : x \in \{x|Q\})$
$= \langle$(7.3) — Axiome, transfert, avec $[R := \{x|P\}]$ et $[P := \{x|Q\}]\rangle$
$(\forall x \mid: x \in \{x|P\} \Rightarrow x \in \{x|Q\})$
$= \langle$(11.13) — Axiome, sous-ensemble (2 fois),
1$^{\text{ère}}$ fois avec $[x := x]$ et $[R := P]$, 2$^{\text{e}}$ fois avec $[x := x]$ et $[R := Q]\rangle$
$(\forall x \mid: P \Rightarrow Q)$

C.Q.F.D.

**Exercice 3 :** *(Vous pouvez faire cet exercice en représentant vos relations par des graphes.)*

Étant données les trois relations $\rho, \sigma, \theta \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ suivantes :

- $\rho = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$
- $\sigma = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle\}$
- $\theta = \{x, y | x \leq y : \langle x, y\rangle\}$

**a)** Calculez $\rho \circ \sigma$, $\rho^2$, $\sim \theta$ et $\theta^{-1}$.

**b)** Montrez que pour ce $\rho$, ce $\sigma$ et ce $\theta$, les théorèmes (12.23 (a), (c) et (e), ainsi que le théorème (12.33) sont corrects.

**c)** Déterminez la (ou les) propriété(s) du tableau 12.1 que la relation $\rho$ satisfait.

**d)** Même question pour la relation $\sigma$.

**e)** Même question pour la relation $\theta$.

**f)** Existe-t-il un $n$ pour lequel $\rho^n = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ ? Si oui, trouvez le plus petit de ces $n$.

**g)** Même question pour la relation $\sigma$.

**h)** Même question pour la relation $\theta$.

**RÉPONSES :**

a)
$$\begin{array}{lcl} \rho \circ \sigma & = & \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\} \\ \rho^2 & = & \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\} \\ \sim \theta & = & \{x, y \mid x > y : \langle x, y\rangle\} \\ \theta^{-1} & = & \{x, y \mid x \leq y : \langle y, x\rangle\} \text{ ou } \{x, y \mid x \geq y : \langle x, y\rangle\} \end{array}$$

c) (b), (d) et (e).
d) (c).
e) (a), (d) et (f)
f) NON.
g) OUI, $n = 2$.
h) NON.

**Exercice 4 :** (*Pour ce numéro, aucune justification n'est demandée.*)
Étant données les trois relations $\rho, \sigma, \theta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ suivantes :

- $\rho = \{i, j | i + 1 = j : \langle i, j\rangle\}$
- $\sigma = \rho^+ = (\cup n | 0 < n : \rho^n)$
- $\theta = \{x, y | (\exists z : \mathbb{Z} | : 2z = x - y) : \langle x, y\rangle\}$

**a)** Donnez $\rho \circ \sigma$, $\rho^2$, $\sigma \cup \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}$, $\sim \theta$ et $\theta^{-1}$.

**Réponse :**
$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma &= \{i, j : \mathbb{Z} | i + 1 < j : \langle i, j\rangle\} \\ \rho^2 &= \{i, j : \mathbb{Z} | i + 2 = j : \langle i, j\rangle\} \\ \sigma \cup \mathbf{I}_{\mathbb{Z}} &= \{i, j : \mathbb{Z} | i \leq j : \langle i, j\rangle\} \\ \sim \theta &= \{x, y | (\exists z : \mathbb{Z} | : 2z + 1 = x - y) : \langle x, y\rangle\} \\ \theta^{-1} &= \theta \end{aligned}$$

**b)** Déterminez la (ou les) propriété(s) du tableau 12.1 que la relation $\rho$ satisfait.
**Réponse :** (b)irréflexivité, (d)antisymétrie et (e)asymétrie.

**c)** Même question pour la relation $\sigma$.
**Réponse :** (b)irréflexivité, (d)antisymétrie, (e)asymétrie et (f)transitivité.
(Notez que $\sigma = \{i, j : \mathbb{Z} | i < j : \langle i, j\rangle\}$.)

**d)** Même question pour la relation $\sigma \cup \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}$.
**Réponse :** (a)réflexivité, (d)antisymétrie et (f)transitivité.

**e)** Même question pour la relation $\theta$.
**Réponse :** (a)réflexivité, (c)symétrie et (f)transitivité.