

Exercice 1 : Finir les exercices 5 et 6 de la semaine passée.

Exercice 2 : Illustrez chacune des propriétés ci-dessous à l'aide de diagramme de Venn et donnez-en une démonstration formelle :

(11.9) $S = \{x|x \in S : x\}$

(11.49) Distributivité de \cap sur \cup : $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$

(11.53) $S \subseteq T \equiv S \cup T = T$

(11.57) $S - T = S \cap \sim T$

(11.64) $(\forall x| : P \Rightarrow Q) \equiv \{x|P\} \subseteq \{x|Q\}$

Exercice 3 : (Vous pouvez faire cet exercice en représentant vos relations par des graphes.)

Étant données les trois relations $\rho, \sigma, \theta \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ suivantes :

– $\rho = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$

– $\sigma = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$

– $\theta = \{x, y|x \leq y : \langle x, y \rangle\}$

a) Calculez $\rho \circ \sigma, \rho^2, \sim \theta$ et θ^{-1} .

b) Montrez que pour ce ρ , ce σ et ce θ , les théorèmes (10.23 (a), (c) et (e), ainsi que le théorème (10.33) sont corrects.

c) Déterminez la (ou les) propriété(s) du tableau 10.1 que la relation ρ satisfait.

d) Même question pour la relation σ .

e) Même question pour la relation θ .

f) Existe-t-il un n pour lequel $\rho^n = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$? Si oui, trouvez le plus petit de ces n .

g) Même question pour la relation σ .

h) Même question pour la relation θ .

Exercice 4 : (Pour ce numéro, aucune justification n'est demandée.)

Étant données les trois relations $\rho, \sigma, \theta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ suivantes :

– $\rho = \{i, j|i + 1 = j : \langle i, j \rangle\}$

– $\sigma = \rho^+ = (\cup n|0 < n : \rho^n)$

– $\theta = \{x, y|(\exists z : \mathbb{Z} : 2z = x - y) : \langle x, y \rangle\}$

a) Donnez $\rho \circ \sigma, \rho^2, \sigma \cup \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}, \sim \theta$ et θ^{-1} .

b) Déterminez la (ou les) propriété(s) du tableau 10.1 que la relation ρ satisfait.

c) Même question pour la relation σ .

d) Même question pour la relation $\sigma \cup \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}$.

e) Même question pour la relation θ .

Exercice 5 : (*Pour fin de réflexion et de discussions*)

Un hôtel a un nombre infini de chambres (pour chaque entier $i > 0$, il y a une chambre portant le numéro (i)). L'hôtel est plein (il y a un voyageur dans chaque chambre). Arrive un nouveau voyageur qui voudrait bien dormir à l'hôtel lui aussi. Alors l'hôtelier lui dit qu'il va lui trouver une chambre. Il ne mettra à la porte aucun voyageur, il ne mettra pas deux voyageurs dans une même chambre et il ne fera pas construire une nouvelle chambre. Alors comment l'hôtelier fera-t-il ?