MAT-22257 : Exercices Série 1

Réponses et\ou solutions.

Exercice 0 – (revision) : Dans les notes de cours, faites :

a) Section 1.3 : Exercice : 1.12 ;
b) Section 1.5 : Exercices : 2 et 3 ;
c) Section 2.5 : Exercices : 1, 2 et 3 ;
d) Section 3.7 : Exercices : 1, 4, 11 et 12.

$\langle\langle$ **Solutions disponibles au Chapitre 14 des notes de Jules Desharnais.** $\rangle\rangle$

Exercice 1 : LIRE les sections 11.1, 11.2 et 11.3.

Exercice 2 : Définissez les ensembles suivants par compréhension :

a) l'ensemble des entiers non-négatifs plus petits que 4 ;
Réponse : $\{n : \mathbb{N} \mid: n < 4 : n\}$ ou $\{n : \mathbb{Z} \mid: 0 \leq n < 4 : n\}$
Ceci n'est pas en compréhension : $\{0, 1, 2, 3\}$.

b) l'ensemble des entiers positifs divisibles par 3 et plus petits que 4 ;
Réponse : $\{i : \mathbb{N} \mid 0 < 3i < 4 : 3i\}$
Ceci n'est pas en compréhension : $\{3\}$.

c) l'ensemble des nombres impairs ;
Réponse : $\{i : \mathbb{Z} \mid: 2i + 1\}$ ou $\{n : \mathbb{Z} \mid (\exists i : \mathbb{Z} \mid: n = 2i + 1) : n\}$
Ceci n'est pas en compréhension : $\{\ldots, -7, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

d) l'ensemble des carrés dont la racine est située entre 10 et 22 ;
Réponse : $\{i : \mathbb{N} \mid 10 \leq i \leq 22 : i^2\}$ ou $\{n : \mathbb{N} \mid 10 \leq \sqrt{n} \leq 22 : n\}$
Ceci n'est pas en compréhension : $\{10^2, 11^2, 12^2, 13^2, \ldots, 22^2\}$.

e) l'ensemble des puissances de 2.
Réponse : $\{i : \mathbb{N} \mid: 2^i\}$ ou $\{n : \mathbb{N} \mid (\exists i : \mathbb{N} \mid: n = 2^i) : n\}$
Ceci n'est pas en compréhension : $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\}$.

Exercice 3 : Donnez une description en *langue française* des ensembles suivants :

a) $\{x : \mathbb{Z} \mid 0 < x \wedge \text{ paire}.x : x\}$;
Réponse : L'ensemble des entiers positifs pairs.

b) $\{x : \mathbb{Z} \mid 0 < x : 2 \times x\}$;
Réponse : Même réponse qu'en a).

c) $\{x : \mathbb{Z} \mid 0 < x \wedge (\exists y : \mathbb{Z} \mid 2 \times y = x) : x\}$;
Réponse : Même réponse qu'en a).

d) $\{z : \mathbb{Z} \mid (\exists x, y : \mathbb{Z} \mid -1 < x \wedge 1 < y < 4 : z = x \times y) : z\}$;
Réponse : L'ensemble des entiers non-négatifs qui sont divisibles par 2 ou par 3.

e) $\{x, y : \mathbb{Z} \mid -1 < x \wedge 1 < y < 4 : x \times y\}$.
Réponse : Même réponse qu'en d).

Exercice 4 : Notes de cours Section 11.5 : Exercices : 1 et 2.

$\langle\langle$ **Solutions disponibles au Chapitre 14 des notes de Jules Desharnais.** $\rangle\rangle$

Exercice 5 : Notes de cours Section 11.5 : Exercices : 3 à 8.

$\langle\langle$ **Solutions disponibles au Chapitre 14 des notes de Jules Desharnais.** $\rangle\rangle$

Pour l'exercice 6, vous pourriez avoir besoin de :

- (7.23) — *Metathéorème*
- (7.3), (7.24) ou (7.25) – *Transfert et loi de De Morgan pour* $\forall$ *et* $\exists$
- (3.73), (3.76), (3.97), (3.98) ou (3.99) – *Implication*
- (6.23) — *Distributivité de la quantification* (N.B. : $\forall$ et $\wedge$ représentent le même quantificateur. Voir page 74)
- (3.13), (3.14) ou (3.17) – *Théorèmes reliant* $\equiv, \not\equiv$ *et* $\neg$
- (3.106)
- (***) — *Axiome de définition de* $\notin$ *:* $x \notin S \equiv \neg(x \in S)$
- (****)— *Axiome de définition de* $\neq$ *:* $x \neq S \equiv \neg(x = S)$

Exercice 6 : Démontrez :

(11.50)b De Morgan(b) : $\sim (S \cap T) = \sim S \cup \sim T$;

Solution 1 :

$\sim S \cup \sim T$
$= \langle (11.27)$ avec $[S := \sim S \cup \sim T] \rangle$
$\sim\sim (\sim S \cup \sim T)$
$= \langle (11.50)a$ – De Morgan, avec $[S := \sim S]$ et $[T := \sim T] \rangle$
$\sim (\sim\sim S \cap \sim\sim T))$
$= \langle (11.27) \rangle$
$\sim (S \cap \sim\sim T)$
$= \langle (11.27)$ avec $[S := T] \rangle$
$\sim (S \cap T)$

Solution 2 :

Nous utiliserons la méthode de démonstration (8.18)b qui ramène ce problème à la démonstration de $v \in \sim S \cup \sim T \equiv v \in \sim (S \cap T)$ où $v \in \mathbf{U}$.

$v \in \sim (S \cap T)$
$= \langle$(11.26) avec $[S := (S \cap T)]$ car $v \in \mathbf{U}\rangle$
$v \notin (S \cap T)$
$= \langle$(***) — Axiome de définition de $\notin$, avec $[S := (S \cap T)]\rangle$
$\neg(v \in (S \cap T)$
$= \langle$(11.29) — Axiome de l'intersection$\rangle$
$\neg(v \in S \wedge v \in T)$
$= \langle$(3.48)a — De Morgan, avec $[p := v \in S]$ et $[q := v \in T]\rangle$
$\neg(v \in S) \vee \neg(v \in T)$
$= \langle$(***) — Axiome de définition de $\notin\rangle$
$v \notin S \vee \neg(v \in T)$
$= \langle$(***) — Axiome de définition de $\notin$, avec $[S := (S \cap T)]\rangle$
$v \notin S \vee v \notin T$
$= \langle$(11.26) avec $[S := T]$ car $v \in \mathbf{U}\rangle$
$v \notin S \vee v \in \sim T$
$= \langle$(11.26) car $v \in \mathbf{U}\rangle$
$v \in \sim S \vee v \in \sim T$
$= \langle$(11.29) — Axiome de l'union, avec$[S := \sim S]$ et $[T := \sim T]\rangle$
$v \in \sim S \cup \sim T$

(11.54) $S \subseteq T \equiv S \cap T = S$;

Solution :

$S \subseteq T = \langle$(11.21) — Axiome du sous-ensemble$\rangle$
$(\forall x | x \in S : x \in T)$
$= \langle$(7.3) — Axiome de transfert, avec $[R := x \in S]$ et $[P := x \in T]\rangle$
$(\forall x | : x \in S \Rightarrow x \in T)$
$= \langle$(3.76) — Définition alternative de $\Rightarrow$, avec $[p := x \in S]$ et $[q := x \in T]\rangle$
$(\forall x | : x \in S \wedge x \in T \equiv x \in S)$
$= \langle$(11.29) — Axiome d'intersection, avec $[v := x]\rangle$
$(\forall x | : x \in S \cap T \equiv x \in S)$
$= \langle$(11.8) — Axiome d'extensionalité, avec $[S := S \cap T]$ et $[T := S]\rangle$
$S \cap T = S$

(11.65) Antisymétrie de $\subseteq$: $S \subseteq T \wedge T \subseteq S \equiv S = T$;

Solution :

$S \subseteq T \wedge T \subseteq S$
$= \langle$(11.21) — Axiome du sous-ensemble$\rangle$
$(\forall x | x \in S : x \in T) \wedge T \subseteq S$
$= \langle$(11.21) — Axiome du sous-ensemble, avec $[S := T]$ et $[T := S]\rangle$
$(\forall x | x \in S : x \in T) \wedge (\forall x | x \in T : x \in S)$
$= \langle$(7.3) — Transfert, avec $[R := x \in S]$ et $[P := x \in T]\rangle$

$(\forall x| : x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (\forall x|x \in T : x \in S)$
$= \langle$(7.3) — Transfert, avec $[R := x \in T]$ et $[P := x \in S]\rangle$
$(\forall x| : x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (\forall x| : x \in T \Rightarrow x \in S)$
$= \langle$(7.3) — Axiome de distributivité, avec $[\star := \forall]$, $[P := x \in S \Rightarrow x \in T]$ et $[Q := x \in T \Rightarrow x \in S]$
(Rappelons que les quantificateurs $\forall$ et $\wedge$ sont une et même chose.)$\rangle$
$(\forall x| : x \in S \Rightarrow x \in T \wedge x \in T \Rightarrow x \in S)$
$= \langle$(3.97) — Implication mutuelle, avec $[p := x \in S]$ et $[q := x \in T]\rangle$
$(\forall x| : x \in S \equiv x \in T)$
$= \langle$(11.8) — Axiome d'extensionalité$\rangle$
$S = T$

Attention, ce qui suit n'est pas une solution complète :
$S \subseteq T \wedge T \subseteq S$
$= \langle(11.54)$ — Propriété de $\cap\rangle$
$S \cap T = S \wedge T \subseteq S$
$= \langle(11.54)$ — Propriété de $\cap$, avec $[S := T]$ et $[T := S]\rangle$
$S \cap T = S \wedge T \cap S = T$
$= \langle(11.41)$ — Commutativité de $\cap\rangle$
$T \cap S = S \wedge T \cap S = T$
$= \langle$(1.11) — Transitivité de =$\rangle$
$S = T \cap S \wedge T \cap S = T$
$\Rightarrow \langle$(1.11) — transitivité de =, avec $[X := S]$, $[Y := T \cap S]$ et $[Z := T]\rangle$
$S = T$

(11.77) $(\exists x|x \in S : x \notin T) \Rightarrow S \neq T$;

Solution 1 :
1ère étape : Démontrons que $\Big((\exists x|x \in S : x \notin T) \Rightarrow S \neq T\Big) \equiv \Big(S = T \Rightarrow S \subseteq T\Big)$.

$(\exists x|x \in S : x \notin T) \Rightarrow S \neq T$
$= \langle$(3.80) — Contrapositivité, avec $[p := (\exists x|x \in S : x \notin T)]$ et $[q := S \neq T]\rangle$
$\neg(S \neq T) \Rightarrow \neg(\exists x|x \in S : x \notin T)$
$= \langle(* * *)$ — Axiome de définition de $\notin$, avec $[S := T]\rangle$
$\neg(S \neq T) \Rightarrow \neg(\exists x|x \in S : \neg(x \in T))$
$= \langle(7.25)(a)$ — De Morgan, avec $[R := x \in S)]$ et $[q := x \in T]\rangle$
$\neg(S \neq T) \Rightarrow (\forall x|x \in S : x \in T)$
$= \langle(* * **)$ — Axiome de définition de $\neq\rangle$
$\neg\neg(S = T) \Rightarrow (\forall x|x \in S : x \in T)$
$= \langle$(3.15) — Double négation, avec $[p := (S = T)]\rangle$
$S = T \Rightarrow (\forall x|x \in S : x \in T)$
$= \langle(11.21)$ — Axiome sous-ensemble$\rangle$
$S = T \Rightarrow S \subseteq T$

2e étape : Démontrons $S = T \Rightarrow S \subseteq T$.

$S = T$
$= \langle(11.8)$ — Axiome d'extensionnalité$\rangle$
$(\forall x| : x \in S \equiv x \in T)$

$= \langle (3.98)$ — Antisymétrie de $\Rightarrow$, avec $[p := x \in S]$ et $[q := x \in T]\rangle$
$(\forall x| : (x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (x \in T \Rightarrow x \in S))$
$\Rightarrow \langle (7.17)$ — Affaiblissement du corps, avec $[P := (x \in S \Rightarrow x \in T)]$ et $[Q := (x \in T \Rightarrow x \in S)]\rangle$
$(\forall x| : x \in S \Rightarrow x \in T)$
$= \langle (7.3)$ — Transfert, avec $[R := x \in S]$ et $[P := x \in T]\rangle$
$(\forall x| x \in S : x \in T)$
$= \langle (11.21)$ — Axiome, sous-ensemble$\rangle$
$S \subseteq T$

Solution 2 :
$(\exists x| x \in S : x \notin T)$
$= \langle (7.26)$ — Transfert, avec $[R := x \in S]$ et $[P := x \notin T]\rangle$
$(\exists x| : x \in S \wedge x \notin T)$
$= \langle (***)$ — Axiome de définition de $\notin$, avec $[S := T]\rangle$
$(\exists x| : x \in S \wedge \neg(x \in T))$
$= \langle (3.62)$ — Théorème reliant $\wedge$ et $\equiv$, avec $[p := x \in S]$ et $[q := \neg(x \in T)]\rangle$
$(\exists x| : x \in S \wedge x \in T \equiv \neg(x \in S))$
$= \langle (7.24)$ — Axiome, De Morgan , avec $[P := x \in S \wedge x \in T \equiv \neg(x \in S)]\rangle$
$(\neg \forall x| : \neg(x \in S \wedge x \in T \equiv \neg(x \in S)))$
$= \langle (3.12)$ — Axiome de distributivité de $\neg$ sur $\equiv$, avec $[p := x \in S \wedge x \in T]$ et $[q := \neg(x \in S)]\rangle$
$(\neg \forall x| : \neg(x \in S \wedge x \in T) \equiv \neg(x \in S))$
$= \langle (3.14)$ et (3.2) — $(\neg p \equiv q) \equiv (p \equiv \neg q)$, avec $[p := (x \in S \wedge x \in T)]$ et $[q := \neg(x \in S)]\rangle$
$(\neg \forall x| : (x \in S \wedge x \in T) \equiv \neg\neg(x \in S))$
$= \langle (3.15)$ — Double négation, avec $[p := (x \in S)]\rangle$
$(\neg \forall x| : (x \in S \wedge x \in T) \equiv (x \in S))$
$= \langle (11.29)$ — Axiome d'intersection, avec $[v := x]\rangle$
$(\neg \forall x| : (x \in S \cap T) \equiv (x \in S))$
$= \langle (11.8)$ — Axiome d'extensionnalité, avec $[S := S \cap T]$ et $[T := S]\rangle$
$\neg(S \cap T = S)$
$= \langle (11.54)$ — Propriété de $\cap\rangle$
$\neg(S \subseteq T)$
$= \langle (11.71)$ — Propriété de $\subseteq\rangle$
$\neg(S \subset T \vee S = T)$
$= \langle (11.58)b$ — De Morgan , avec $[p := (S \subset T)]$ et $[q := S = T]\rangle$
$\neg(S \subset T) \wedge \neg(S = T)$
$= \langle (11.58)b$ — Commutativité de $\wedge$, avec $[p := (S \subset T)]$ et $[q := S = T]\rangle$
$\neg(S = T) \wedge \neg(S \subset T)$
$\Rightarrow \langle (3.92)(b)$ — Affaiblissement $\neg$ sur $\equiv$, avec $[p := \neg(S = T)]$ et $[q := \neg(S \subset T)]\rangle$
$\neg(S = T)$
$= \langle (****)$ — Axiome de définition de $\neq\rangle$
$S \neq T$

(11.67)–transitivité $S \subseteq T \wedge T \subseteq U \Rightarrow S \subseteq U$;

Solution

$S \subseteq T \wedge t \subseteq U$

$= \left\langle (11.21) \text{ — ax.sous-ensemble (2 fois) } \begin{cases} \text{1ère fois avec } [S := S] \text{ et } [T := T] \\ \text{2e fois avec } [T := T] \text{ et } [T := U] \end{cases} \right\rangle$

$(\forall x \mid x \in S \colon x \in T) \wedge (\forall x \mid x \in T \colon x \in U)$

$= \left\langle (7.3) \text{ — ax.transfert (2 fois) } \begin{cases} \text{1ère fois avec } [x := x],\ [R := x \in S] \text{ et } [P := x \in T] \\ \text{2e fois avec } [x := x],\ [R := x \in T] \text{ et } [P := x \in U] \end{cases} \right\rangle$

$(\forall x \mid \colon x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (\forall x \mid \colon x \in T \Rightarrow x \in U)$

$= \left\langle \begin{array}{l} (6.23) \text{ — ax.distributivité, avec } [\star := \wedge],\ [R := VRAI],\ [P := x \in S \Rightarrow x \in T] \\ \text{et } [Q := x \in T \Rightarrow x \in U] \quad \text{(NB : Le } \forall \text{ est un } \wedge \text{ et cette quantification est toujours définie.)} \end{array} \right\rangle$

$(\forall x \mid \colon (x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (x \in T \Rightarrow x \in U))$

$\Rightarrow \left\langle \begin{array}{c} \text{Lemme}(\clubsuit)\text{, ci-bas, avec } [x := x],\ [p := (x \in S \Rightarrow x \in T)], \\ [q := (x \in T \Rightarrow x \in U)] \text{ et } [r := (x \in S \Rightarrow x \in U)] \end{array} \right\rangle$

$(\forall x \mid \colon (x \in S \Rightarrow x \in U))\rangle$

$= \langle (7.3) \text{ — ax.transfert avec } [x := x],\ [R := x \in S] \text{ et } [P := x \in U] \rangle$

$(\forall x \mid (x \in S \colon x \in U))$

$= \langle (11.21) \text{ — ax.sous-ensemble, avec } [x := x],\ [S := S] \text{ et } [T := U] \rangle$

$S \subseteq U$

Il ne reste donc que le lemme($\clubsuit$) à démontrer.

Lemme($\clubsuit$) : $\Big(\forall x \mid \colon (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x \mid \colon p \Rightarrow r\Big)$

Démonstration du lemme :

Étape 1 : Montrons que $\Big(\forall x \mid \colon (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big)$.

Ce qui, par le Métathéorème (7.23), est équivalent à montrer : $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
Or cet énoncé a déjà été montré, il s'agit de (3.99)(a)—Transitivité. $\square$

Étape 2 : Montrons que $\Big(\forall x \mid \colon (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big) \Rightarrow \Big((\forall x \mid \colon p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (\forall \mid \colon p \Rightarrow r) \Big)$

$\Big(\forall x \mid \colon (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big)$

$\Rightarrow \langle (7.18) \text{ — Monotonie de } \forall, \text{ avec } [x := x], [R := VRAI], [Q := p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r] \text{ et } [P := p \Rightarrow r] \rangle$

$\Big((\forall x \mid \colon p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (\forall \mid \colon p \Rightarrow r) \Big)$

Étape 3 : Nous avons donc montré que :

$$\Big(\forall x \mid : (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big)$$

et

$$\Big(\forall x \mid : (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big) \Rightarrow \Big(\ (\forall x \mid : p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r)\ \Rightarrow\ (\forall \mid : p \Rightarrow r)\ \Big)$$

Par le Modus Ponens (3.93), le Lemme(♣) est donc démontré. C.Q.F.D.