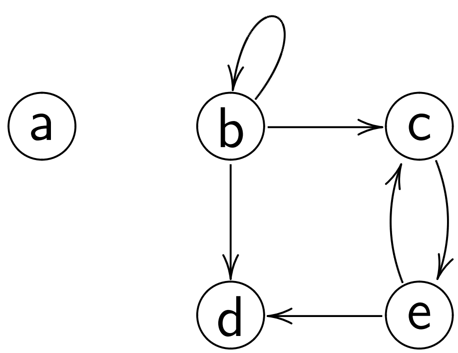
Chapitre 13

Théorie des graphes

13.1 Graphes et chemins

Graphes orientés

Un *graphe orienté* est un couple $\langle S, A\rangle$, où S est un ensemble fini non vide et A une relation sur S. Un élément de S est appelé un *sommet* et un élément (un couple) de A est appelé un *arc*. La composante a d'un arc $\langle a, b\rangle$ est dite l'*origine* de l'arc et la composante b est dite la *cible* ou la *destination* de l'arc. Un arc de la forme $\langle a, a\rangle$ s'appelle une *boucle*. Un sommet qui n'apparaît dans aucun arc est dit *isolé*. Si $\langle a, b\rangle \in A$, les sommets a et b sont dits *adjacents*.

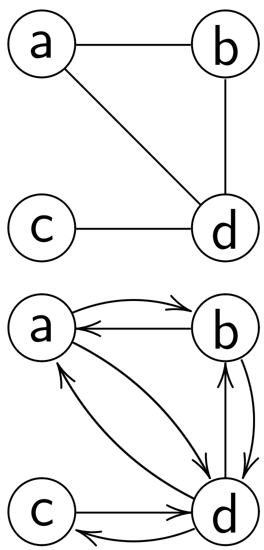


$G = \langle S, A\rangle$
où
$S = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}\}$
$A = \big\{\langle \mathsf{b}, \mathsf{b}\rangle, \langle \mathsf{b}, \mathsf{c}\rangle, \langle \mathsf{b}, \mathsf{d}\rangle, \langle \mathsf{c}, \mathsf{e}\rangle, \langle \mathsf{e}, \mathsf{c}\rangle, \langle \mathsf{e}, \mathsf{d}\rangle\big\}$

Fig. 13.1 – Un graphe orienté G

Graphes non orientés

Un *graphe non orienté* est un couple $\langle S, A\rangle$, où S est un ensemble fini non vide et A un ensemble de couples non ordonnés d'éléments de S. Un élément de S est appelé un *sommet* et un élément de A est appelé une *arête*. Une arête est représentée par un ensemble de deux sommets. Un sommet qui n'apparaît dans aucune arête est dit *isolé*. Si $\{a, b\} \in A$, les sommets a et b sont dits *adjacents*.



$G = \langle S, A\rangle$

où

$S = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$

$A = \big\{\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{d}\}, \{\mathsf{b}, \mathsf{d}\}, \{\mathsf{c}, \mathsf{d}\}\big\}$

$G' = \langle S, A'\rangle$

où

$S = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$

$$A' = \big\{\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}\rangle, \langle \mathsf{b}, \mathsf{a}\rangle, \langle \mathsf{a}, \mathsf{d}\rangle, \langle \mathsf{d}, \mathsf{a}\rangle, \langle \mathsf{b}, \mathsf{d}\rangle, \langle \mathsf{d}, \mathsf{b}\rangle, \langle \mathsf{c}, \mathsf{d}\rangle, \langle \mathsf{d}, \mathsf{c}\rangle\big\}$$

FIG. 13.2 – Un graphe non orienté G et une représentation équivalente par un graphe orienté G'

Degré d'un sommet ou d'un graphe

On dit que l'arête $\{a, b\}$ et l'arc $\langle a, b\rangle$ sont *incidents* aux sommets a et b. Le *degré d'un sommet* s, noté $\mathsf{deg}.s$, est le nombre d'arêtes ou d'arcs dans lesquels s apparaît (c'est-à-dire le nombre d'arêtes ou d'arcs incidents), les boucles comptant pour 2. Le *degré d'un graphe* est le degré du sommet qui a le degré le plus élevé.

Par exemple, dans la figure 13.1,

$$\mathsf{deg.a} = 0, \qquad \mathsf{deg.b} = 4, \qquad \mathsf{deg.d} = 2 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{deg}.G = 4$$

(le degré de tout sommet isolé, comme a, est 0). Dans la figure 13.2, pour le graphe non orienté,

$$\mathsf{deg.a} = 2, \qquad \mathsf{deg.c} = 1, \qquad \mathsf{deg.d} = 3 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{deg}.G = 3.$$

Puisque que tout arc incident (de même pour les arêtes) contribue 2 aux degrés des sommets, on obtient le théorème suivant.

(13.1) Théorème : La somme des degrés des sommets d'un graphe $\langle S, A\rangle$ (orienté ou non) est $2 \cdot \#A$.

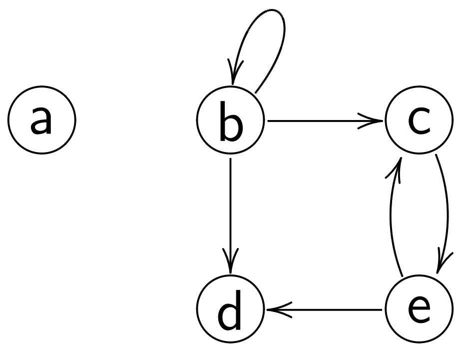
(13.2) Corollaire : Dans un graphe (orienté ou non), le nombre de sommets de degré impair est pair.

Chemins

Un *chemin* dans un graphe orienté est une séquence (suite) de sommets et d'arcs telle que

1. la séquence débute par un sommet et se termine par un sommet ;
2. les sommets et les arcs alternent ;
3. chaque arc est précédé par son sommet origine et est suivi par son sommet cible ;
4. aucun arc n'apparaît plus d'une fois.

Par exemple, dans la figure ci-contre,



$$\langle \mathsf{c}, \langle \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle, \mathsf{e}, \langle \mathsf{e}, \mathsf{d} \rangle, \mathsf{d} \rangle$$

et

$$\langle \mathsf{b}, \langle \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle, \mathsf{c}, \langle \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle, \mathsf{e} \langle \mathsf{e}, \mathsf{c} \rangle, \mathsf{c} \rangle$$

sont des chemins, mais pas

$$\langle \mathsf{b}, \langle \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle, \mathsf{c}, \langle \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle, \mathsf{e} \langle \mathsf{e}, \mathsf{c} \rangle, \mathsf{c}, \langle \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle, \mathsf{e} \rangle$$

ni

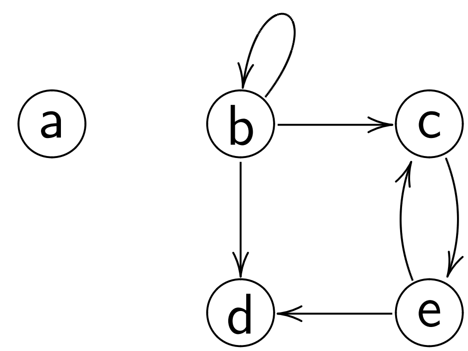
$$\langle \mathsf{b}, \langle \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle, \mathsf{c}, \langle \mathsf{e}, \mathsf{c} \rangle, \mathsf{c} \rangle\ .$$

Chemins (suite)

La *longueur* d'un chemin est le nombre d'arcs de ce chemin :

$$\text{longueur de } \langle \mathsf{c}, \langle \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle, \mathsf{e} \rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{longueur de } \langle \mathsf{c} \rangle = 0 \ .$$

La description des chemins peut être simplifiée en donnant seulement la suite de sommets, puisque les arcs peuvent être ajoutés à partir de la séquence de sommets. Les séquences de sommets suivantes sont donc des chemins du graphe ci-contre :



$\langle \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{e} \rangle$ (longueur 2)
$\langle \mathsf{d} \rangle$ (longueur 0)

Un chemin pourrait aussi être décrit en donnant seulement la séquence d'arcs.

Un *chemin simple* est un chemin dans lequel aucun sommet n'apparaît plus d'une fois, sauf que *le premier et le dernier peuvent être les mêmes*. Par exemple,

$$\langle \mathsf{b} \rangle, \quad \langle \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{d} \rangle, \quad \langle \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{c} \rangle$$

sont des chemins simples du graphe ci-dessus, mais pas $\langle \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{c} \rangle$.

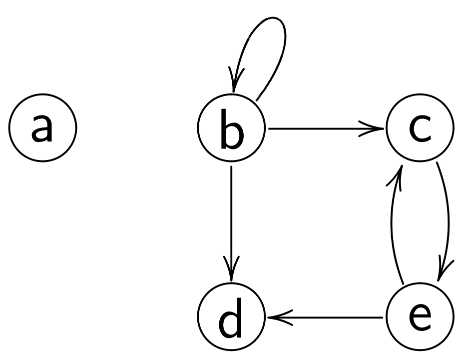
Chemins (suite)

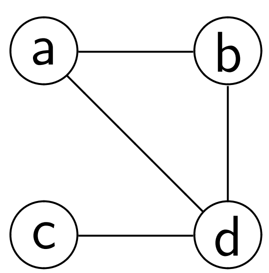
Un chemin est un *cycle* s'il contient au moins un arc et que le premier et le dernier sommet du chemin sont identiques.

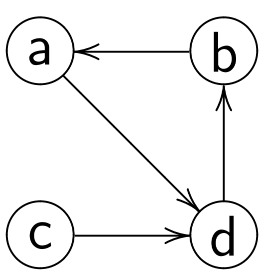
(13.3) Remarque. Des définitions similaires peuvent être données pour les graphes non orientés.

Un graphe non orienté est dit *connexe* s'il y a un chemin entre n'importe quelle paire de sommets. Un graphe orienté est dit *connexe* si, en transformant ses arcs en arêtes non orientées, on obtient un graphe non orienté connexe.

Par exemple, le graphe de gauche ci-dessous n'est pas connexe, mais les deux autres le sont.





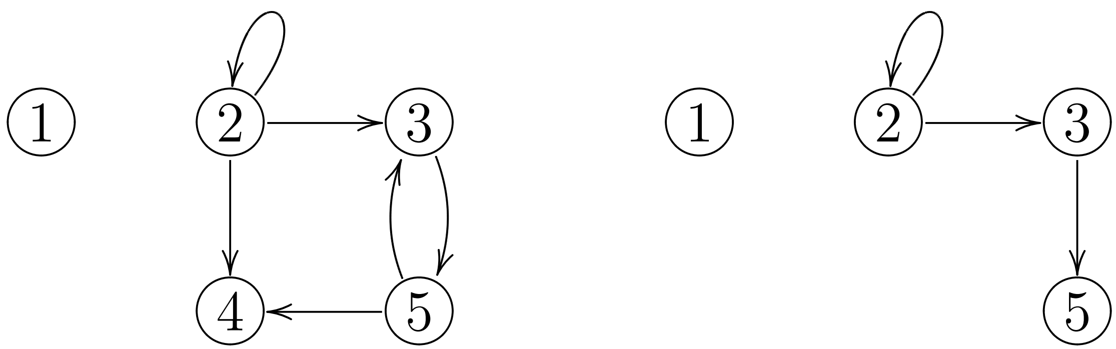


Sous-graphes

Un graphe $\langle S', A' \rangle$ est un *sous-graphe* du graphe $\langle S, A \rangle$ ssi

$$S' \subseteq S \qquad \text{et} \qquad A' \subseteq A \ .$$

Notez que parce que $\langle S', A' \rangle$ est un graphe, les extrémités des arcs ou des arêtes de A' sont dans S'. Le graphe de droite ci-dessous est un sous-graphe du graphe de gauche.



Cette notion s'applique aussi aux graphes non orientés.

13.2 Représentation matricielle des graphes

Les matrices sont l'une des structures de données utilisées en informatique pour représenter les graphes et les relations.

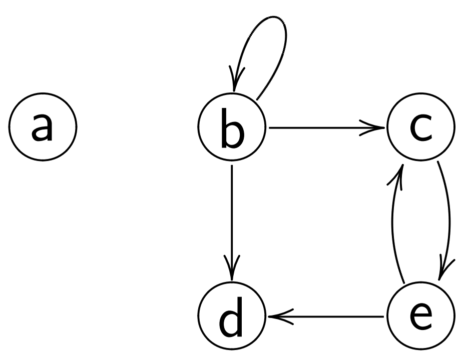
Soit le graphe orienté $G = \langle S, A \rangle$, où

$$S = \{s_1, \ldots, s_n\} \ .$$

La *matrice d'adjacence* M_G de G est une matrice booléenne telle que

$$M_G[i, j] \ \equiv \ \langle s_i, s_j \rangle \in A \ .$$

Voici un graphe et sa matrice d'adjacence (on suppose que les sommets sont ordonnés dans l'ordre a, b, c, d, e). La deuxième matrice utilise la notation usuelle, où 0 et 1 représentent faux et vrai, respectivement. Nous utiliserons la notation usuelle.



$$\begin{pmatrix} \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} \\ \mathsf{f} & \mathsf{v} & \mathsf{v} & \mathsf{v} & \mathsf{f} \\ \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{v} \\ \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{f} \\ \mathsf{f} & \mathsf{f} & \mathsf{v} & \mathsf{v} & \mathsf{f} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les graphes et les matrices

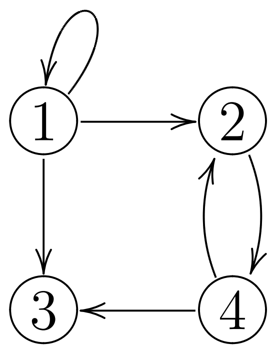
Nous allons définir cinq opérations sur les graphes et sur les matrices d'adjacence de ces graphes. Ce sont des opérations qui s'appliquent aussi aux relations.

Soient les graphes orientés

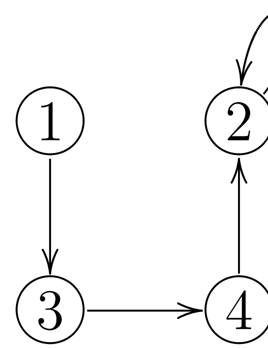
$$G = \langle S, A \rangle \ , \quad G_1 = \langle S, A_1 \rangle \quad \text{et} \quad G_2 = \langle S, A_2 \rangle \ .$$

À des fins d'illustration, nous utiliserons les deux graphes qui suivent :

G_1 :



G_2 :



Leurs matrices sont

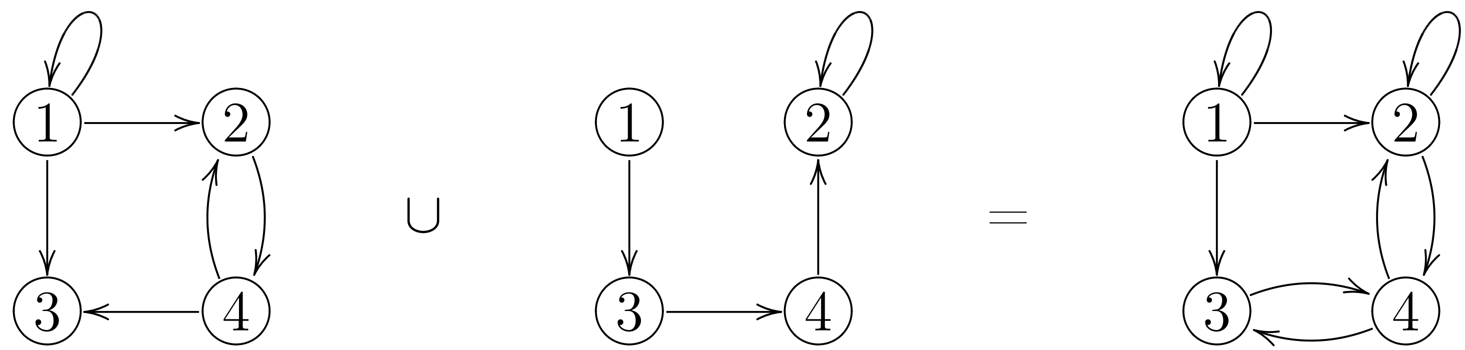
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Union

$$G_1 \cup G_2 \;=\; \langle S, A_1 \rangle \cup \langle S, A_2 \rangle \;=\; \langle S, A_1 \cup A_2 \rangle$$

$$M_1 \cup M_2 \qquad \text{est définie par} \qquad (M_1 \cup M_2)[i,j] \;=\; M_1[i,j] \vee M_2[i,j]$$

C'est-à-dire que l'union des matrices est obtenue en faisant la disjonction des entrées correspondantes. Notez que l'opérateur ensembliste $\cup$ est *surchargé* pour pouvoir l'appliquer non seulement à des ensembles, mais aussi à des graphes et à des matrices.



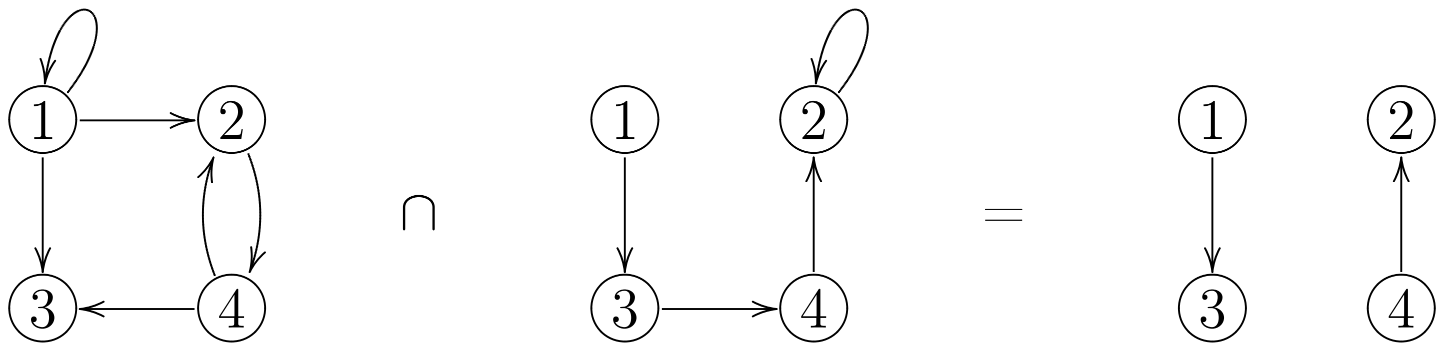
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intersection

$$G_1 \cap G_2 \;=\; \langle S, A_1 \rangle \cap \langle S, A_2 \rangle \;=\; \langle S, A_1 \cap A_2 \rangle$$

$$M_1 \cap M_2 \qquad \text{est définie par} \qquad (M_1 \cap M_2)[i,j] \;=\; M_1[i,j] \wedge M_2[i,j]$$

C'est-à-dire que l'union des matrices est obtenue en faisant la conjonction des entrées correspondantes.



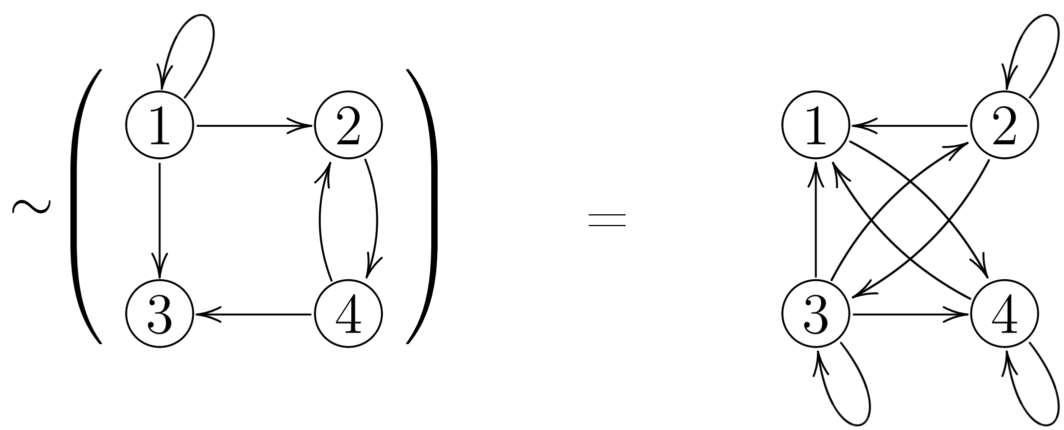
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Complément

$$\sim G \;=\; \sim\langle S, A\rangle \;=\; \langle S, \sim A\rangle$$

$$\sim M \qquad \text{est défini par} \qquad (\sim M)[i,j] \;=\; \neg(M[i,j])$$

C'est-à-dire que le complément d'une matrice est obtenu en faisant la négation des entrées.



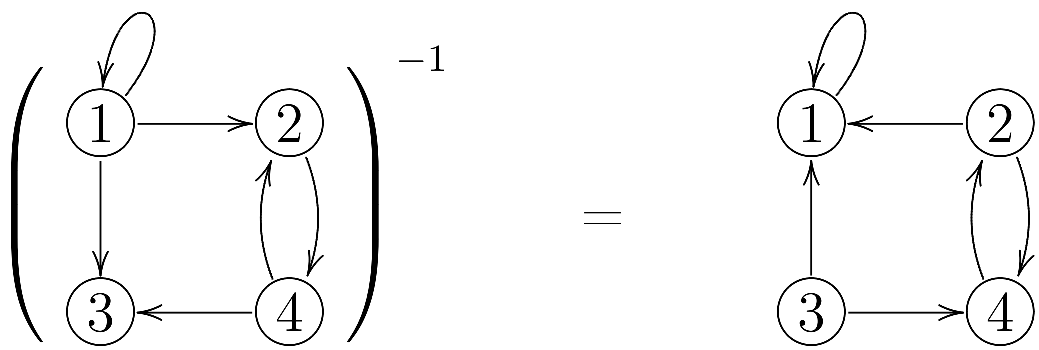
$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse

$$G^{-1} \;=\; \langle S, A\rangle^{-1} \;=\; \langle S, A^{-1}\rangle$$

$$M^{-1} \qquad \text{est défini par} \qquad (M^{-1})[i,j] \;=\; M[j,i]$$

C'est-à-dire que l'inverse d'une matrice est obtenu en transposant la matrice.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

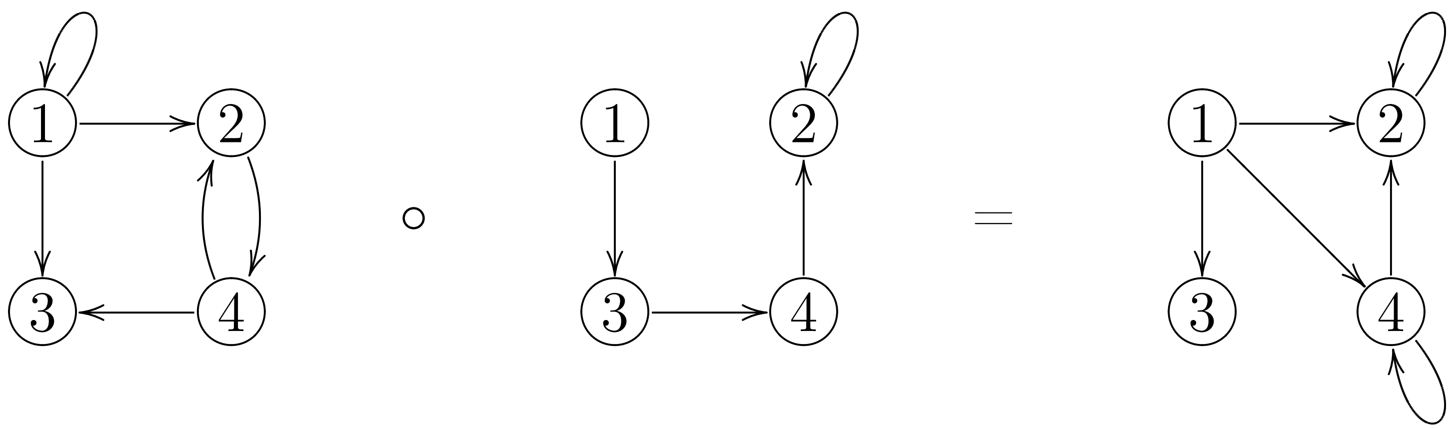
Produit

$$G_1 \circ G_2 \;=\; \langle S, A_1 \rangle \circ \langle S, A_2 \rangle \;=\; \langle S, A_1 \circ A_2 \rangle$$

$$M_1 \circ M_2 \qquad \text{est défini par} \qquad (M_1 \circ M_2)[i,j] \;=\; (\vee k \mid: M_1[i,k] \wedge M_2[k,j])$$

Le produit des matrices est obtenu en faisant une opération similaire au produit matriciel en algèbre linéaire, en remplaçant $+$ par $\vee$ et $\cdot$ par $\wedge$. Rappelons que le produit de matrices en algèbre linéaire est défini par

$$(M_1 M_2)[i,j] \;=\; (\textstyle\sum k \mid: M_1[i,k] \cdot M_2[k,j]) \;.$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, l'entrée $[1,2]$ vient de $(1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \;=\; 1$.

Propriétés des relations sous forme matricielle

Les propriétés des relations se transposent aux matrices à partir de leur définition.

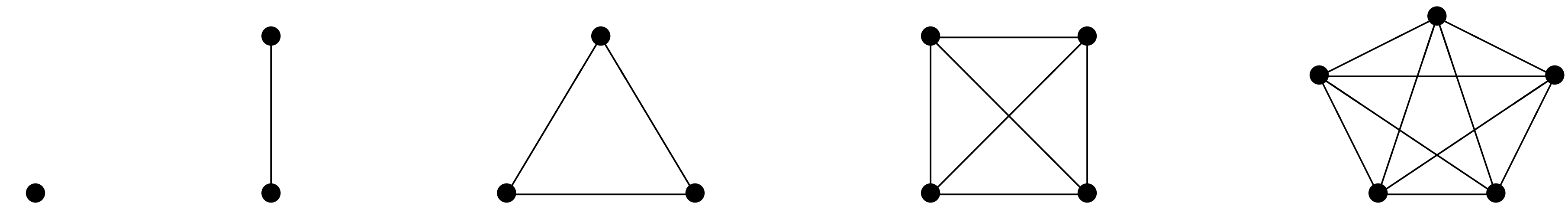
Totalité : au moins un 1 par ligne
Déterminisme (fonction) : au plus un 1 par ligne
Surjectivité : au moins un 1 par colonne
Injectivité : au plus un 1 par colonne
Application : exactement un 1 par ligne
Application bijective : exactement un 1 par ligne et par colonne

	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$
Totalité	$\times$			$\times$	$\times$
Déterm.		$\times$		$\times$	$\times$
Surjectivité			$\times$		$\times$
Injectivité					$\times$
Application				$\times$	$\times$
Applic. bij.					$\times$

13.3 Classes de graphes particulières

Graphes complets

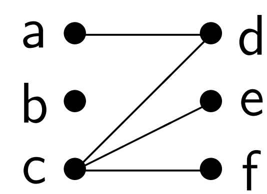
Un *graphe complet* à n sommets, noté K_n, est un graphe non orienté sans boucle tel qu'il y a une arête entre chaque paire de sommets distincts.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Graphes bipartites

Un *graphe bipartite* (ou *biparti*) est un graphe non orienté tel que l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints X et Y tels que chaque arête du graphe a la forme $\{x, y\}$, avec $x \in X$ et $y \in Y$.



$X = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$
$Y = \{\mathsf{d}, \mathsf{e}, \mathsf{f}\}$

13.4 Isomorphisme

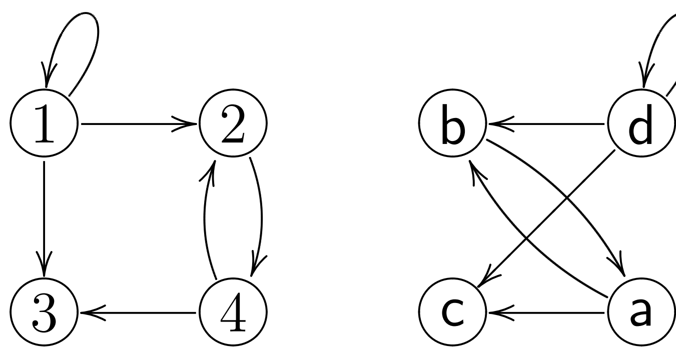
Deux graphes $\langle S, A\rangle$ et $\langle S', A'\rangle$ sont dits *isomorphes* (ce qui signifie *avoir la même forme*) ssi il existe une application bijective $f{:}S \to S'$ telle que

$$(\forall v, w \mid: \langle v, w\rangle \in A \ \equiv\ \langle f.v, f.w\rangle \in A')$$

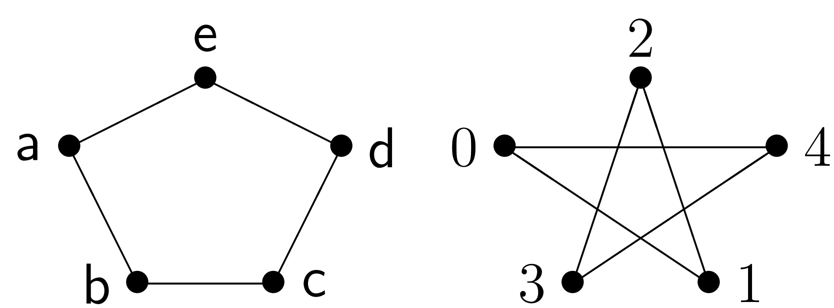
dans le cas des graphes orientés, et

$$(\forall v, w \mid: \{v, w\} \in A \ \equiv\ \{f.v, f.w\} \in A')$$

dans le cas des graphes non orientés.



Bijection : $\{\langle 1, \mathsf{d}\rangle, \langle 2, \mathsf{b}\rangle, \langle 3, \mathsf{c}\rangle, \langle 4, \mathsf{a}\rangle\}$



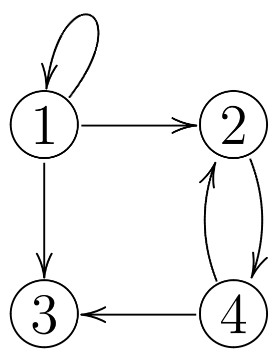
$\{\langle \mathsf{a}, 0\rangle, \langle \mathsf{b}, 1\rangle, \langle \mathsf{c}, 2\rangle, \langle \mathsf{d}, 3\rangle, \langle \mathsf{e}, 4\rangle\}$

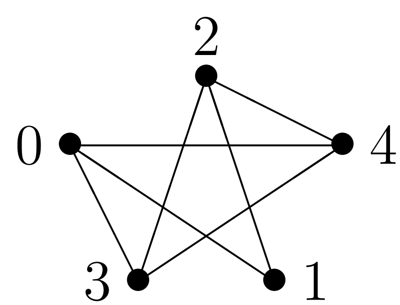
Tous les algorithmes connus pour déterminer si deux graphes donnés sont isomorphes prennent un temps exponentiel dans le nombre des sommets et sont donc inefficaces pour de grands graphes.

13.5 Circuits Hamiltoniens

Un *chemin Hamiltonien* est un chemin qui contient chaque sommet exactement une fois, sauf que le premier et le dernier sommet peuvent être identiques. Un *circuit Hamiltonien* est un chemin Hamiltonien qui est un cycle.

Le graphe de gauche ci-dessous n'a pas de circuit Hamiltonien, mais contient le chemin Hamiltonien $\langle 1, 2, 4, 3 \rangle$. Le graphe de droite contient les circuits Hamiltoniens $\langle 0, 1, 2, 3, 4, 0 \rangle$ et $\langle 0, 1, 2, 4, 3, 0 \rangle$.

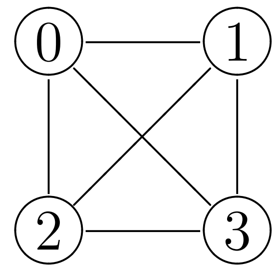


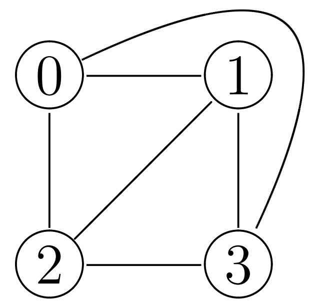


Tous les algorithmes connus pour déterminer si deux graphes donnés contiennent des chemins ou des circuits Hamiltoniens prennent un temps exponentiel dans le nombre des sommets et sont donc inefficaces pour de grands graphes.

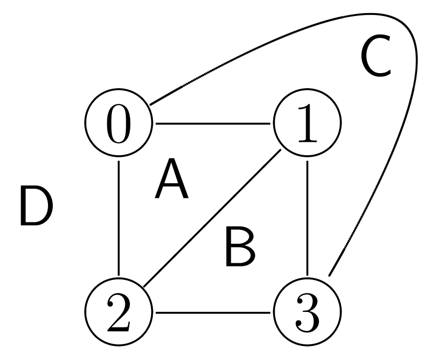
13.6 Graphes planaires

Un graphe est dit *planaire* s'il peut être dessiné dans le plan sans croisement d'arcs ou d'arêtes. Par exemple, le graphe complet K_4 peut être dessiné des deux manières données ci-contre. Comme le graphe de droite ne contient pas de croisement, K_4 est planaire.





Un graphe planaire divise le plan en régions *internes* et une région *externe*. Dans le graphe ci-contre, les régions internes sont $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ et la région externe est D.



(13.4) Théorème : Pour tout graphe planaire connexe avec s sommets, a arêtes et r régions,

$$r = a - s + 2\ .$$

Par exemple, pour le graphe ci-dessus, $r = 4$, $a = 6$ et $s = 4$.

Coloriage de cartes ou de graphes planaires

Étant donnée une carte, combien faut-il de couleurs pour colorier les pays de sorte que deux pays adjacents aient des couleurs différentes ?

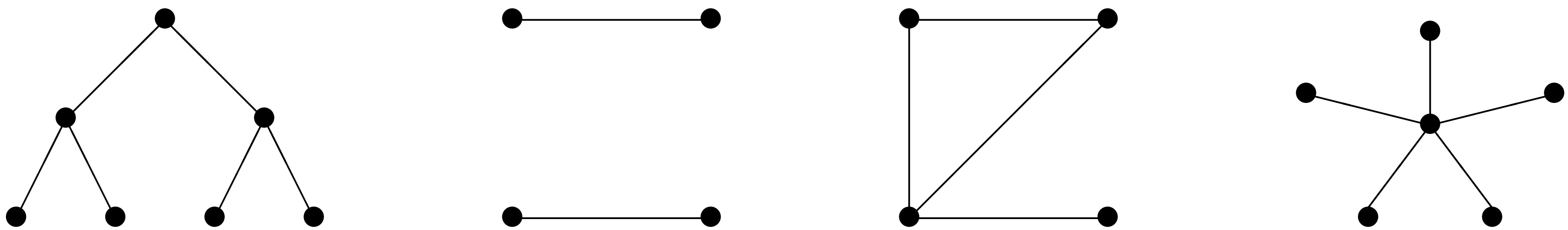
Étant donné un graphe planaire, combien faut-il de couleurs pour colorier les régions du graphe de sorte que deux régions adjacentes aient des couleurs différentes ?

Pendant 100 ans, les mathématiciens ont travaillé sur cette question. La conjecture était que quatre couleurs suffisent. Ce n'est que récemment, en 1977, que Appel et Haken ont montré qu'en effet, quatre couleurs suffisent. La preuve a été complétée en faisant appel aux ordinateurs pour examiner les nombreux cas possibles.

Ces preuves par ordinateur, très longues et difficilement vérifiables par les humains, soulèvent des controverses. La raison principale : le programme utilisé et les logiciels sous-jacents (comme le système d'exploitation) sont-ils corrects ?

13.7 Arbres

Un *arbre* (*non orienté*) est un graphe non orienté connexe sans boucle et sans cycle.



Arbre — Non-arbre (non connexe) — Non-arbre (cycle) — Arbre

On peut aussi définir la notion d'arbre orienté, mais nous ne le ferons pas.

Propriétés des arbres

(13.5) Théorème : Entre deux sommets quelconques d'un arbre, il y a un chemin simple unique.

(13.6) Théorème : Un arbre avec au moins deux sommets a au moins deux sommets de degré 1.

(13.7) Théorème : Pour tout arbre $\langle S, A\rangle$, $\#S = 1 + \#A$.

(13.8) Théorème : Soit $G = \langle S, A\rangle$ un graphe non orienté sans boucle. Les énoncés suivants sont équivalents :

(a) G est un arbre.

(b) G est connexe et l'enlèvement d'une arête quelconque produit deux arbres.

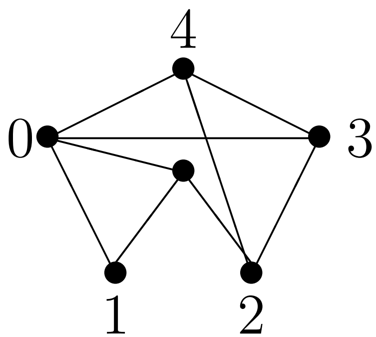
(c) G n'a pas de cycle et $\#S = 1 + \#A$.

(d) G est connexe et $\#S = 1 + \#A$.

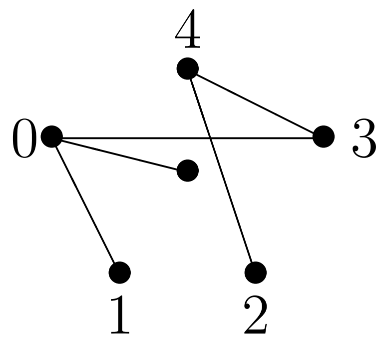
(e) G n'a pas de cycle et l'ajout d'une arête introduit exactement un cycle.

Arbres générateurs

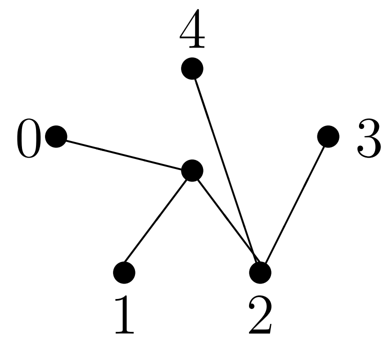
Un *arbre générateur* d'un graphe non orienté G est un sous-graphe de G qui est un arbre et qui contient tous les sommets de G.



G



Arbre générateur 1



Arbre générateur 2

Il y a plusieurs autres arbres générateurs pour ce graphe.