3.2 Modèles de séries de puissances

Théorème R.19 *Soient* $a,\ b \in \mathbb{R} - \{0\}$, *alors* $\forall x \in \left]\frac{-1}{|b|}, \frac{1}{|b|}\right[$, *on a que*

- $\frac{a}{1-bx} = a + a\,b \cdot x + a\,b^2 \cdot x^2 + a\,b^3 \cdot x^3 + a\,b^4 \cdot x^4 + \cdots + a\,b^n \cdot x^n + \cdots$

- $\frac{a}{(1-bx)^2} = a + 2a\,b \cdot x + 3a\,b^2 \cdot x^2 + 4a\,b^3 \cdot x^3 + \cdots + (n+1)a\,b^n \cdot x^n + \cdots$

- $\frac{ax}{(1-bx)^2} = 0 + a \cdot x + 2a\,b \cdot x^2 + 3a\,b^2 \cdot x^3 + 4a\,b^3 \cdot x^4 + \cdots + n\,a\,b^{n-1} \cdot x^n + \cdots$

- $\frac{a}{(1-bx)^3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot a}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot a \cdot b}{2} x + \frac{4 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2}{2} x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot a \cdot b^3}{2} x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1) \cdot a \cdot b^n}{2} x^n + \cdots$

En particulier, nous avons donc les séries de puissances suivantes.

Théorème R.20

- $\frac{1}{1-x} \quad = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$

- $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$
  $= 1 + (-1)x + (-1)^2x^2 + (-1)^3x^3 + (-1)^4x^4 + \cdots$
  $+ (-1)^n x^n + \cdots$

- $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)\,x^n + \cdots$

- $\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + n\,x^n + \cdots$

- $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2}\,x + \frac{4\cdot 3}{2}\,x^2 + \frac{5\cdot 4}{2}\,x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,x^n + \cdots$

3.3 Décomposer une fonction rationnelle en fractions partielles

Théorème R.21 *Voici la forme de décomposition en fractions partielles de chacune des familles de fonctions rationnelles suivantes :*

- $\frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f}$

  Pourvu que $y = cx + d$ *et* $y = ex + f$ *aient des zéros différents.*

- $\frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{(cx+d)^2}$

- $$\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)(fx+g)(hx+i)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{fx+g} + \frac{C}{hx+i}$$

  Pourvu que $y = dx + e$, $y = fx + g$ *et* $hx + i$ *aient des zéros tous différents.*

- $$\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^2(fx+g)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{fx+g}$$

  Pourvu que $y = dx + e$ *et* $y = fx + g$ *aient des zéros différents.*

- $$\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^3} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{(dx+e)^3}$$

3.4 Exemples de résolution de récurrence par la méthode des séries génératrices

Exemple R.22 Résolvez la récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4^n \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Solution :

Étape 1 : On exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle

- On remarque que :

$$a_n - 3 \cdot a_{n-1} - (4^n) = 0 \quad \forall n : \mathbb{N}^*$$

- ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} a_1 - 3 \cdot a_0 - 4 &= 0 \\ a_2 - 3 \cdot a_1 - 4^2 &= 0 \\ a_3 - 3 \cdot a_2 - 4^3 &= 0 \\ a_4 - 3 \cdot a_3 - 4^4 &= 0 \end{aligned}$$

etc...

- Posons $G(x) \;=\; a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots + a_n\,x^n + \cdots.$

Alors,

$$
\begin{array}{rcllllll}
G(x) & = & a_0 & + & a_1x + & a_2x^2 + & a_3x^3 + \cdots + & \\
-3x \cdot G(x) & = & & + & -3 \cdot a_0x + & -3 \cdot a_1x^2 + & -3 \cdot a_2x^3 + \cdots + & -3 \cdot \\
-\frac{1}{1-4x} & = & -1 & + & -4x + & -(4^2)x^2 + & -(4^3)x^3 + \cdots + & - \\
\hline
G(x) - 3xG(x) - \frac{1}{1-4x} & = & a_0 - 1 & + & 0x + & 0x^2 + & 0x^3 + \cdots + &
\end{array}
$$

Ce qui donne $G(x) - 3x\,G(x) - \frac{1}{1-4x} \;=\; 0$

$\langle$ Car $\;\; a_0 - 1 \;=\; 1 - 1 \;=\; 0.\rangle$

Donc, on a $\quad G(x)(1-3x) \;=\; \frac{1}{1-4x}$

Donc, on a $\quad G(x) \;=\; \frac{1}{(1-3x)(1-4x)}$,

ce qui est une forme beaucoup plus simple pour exprimer la fonction G.

Étape 2 : On décompose la fonction G en fractions partielles.

On sait que

$$\frac{1}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-4x}$$

$\langle$ Théorème R.21.$\rangle$

Alors, on a

$$\frac{1}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{A(1-4x) + B(1-3x)}{(1-3x)(1-4x)}$$

Ce qui implique

$$1 = A(1 - 4x) + B(1 - 3x)$$

Donc

$$1 = A \cdot 1 - 4Ax + B \cdot 1 - 3Bx$$

Donc

$$0x + 1 = (-4A - 3B)x + (A + B)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} 1 &= A + B && (1) \\ 0 &= -4A + 3B && (2) \end{aligned}$$

Donc

$$1 - B = A$$

Donc

$$0 = -4(1 - B) - 3B$$

Donc

$$0 = -4 + 4B - 3B$$

Donc

$$0 = -4 + B$$

Donc

$$B = 4$$

$$A = 1 - 4 = -3$$

Conclusion :

$$\frac{1}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1-4x}$$

Étape 3 : On trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question.

$$
\begin{aligned}
&G(x)\\
= \;& \frac{1}{(1-3x)(1-4x)}\\
= \;& \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1-4x}\\
= \;& -3 + (-3)\,3\cdot x + (-3)\,3^2\cdot x^2 + (-3)\,3^3\cdot x^3 + \cdots + (-3)\,3^n\cdot x^n + \cdots\\
& \quad + \;\; 4 + (4)\,4\cdot x + (4)\,4^2\cdot x^2 + (4)\,4^3\cdot x^3 + \cdots + (4)\,4^n\cdot x^n + \cdots\\
= \;& -3 + -(3^2)\cdot x + -(3^3)\cdot x^2 + -(3^4)\cdot x^3 + \cdots + -(3^{n+1})\cdot x^n + \cdots\\
& \quad + \;\; 4 + 4^2\cdot x + 4^3\cdot x^2 + 4^4\cdot x^3 + \cdots + 4^{n+1}\cdot x^n + \cdots\\
= \;& (-3+4) + (-(3^2)+4^2)\cdot x + (-(3^3)+4^3)\cdot x^2 + (-(3^4)+4^4)\cdot x^3 +\\
& \cdots + (-(3^{n+1})+4^{n+1})\cdot x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

Réponse : La définition par terme général est

$$a_n \;=\; -(3^{n+1}) + 4^{n+1} \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.23 Résolvez la récurrence de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

Solution :

Étape 1 : On exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle.

- On remarque que :

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0 \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

- ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 - f_0 &= 0 \\ f_3 - f_2 - f_1 &= 0 \\ f_4 - f_3 - f_2 &= 0 \\ f_5 - f_4 - f_3 &= 0 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

- Posons $G(x) = f_0 + f_1\,x + f_2\,x^2 + f_3\,x^3 + \cdots + f_n\,x^n + \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcl}
G(x) & = & f_0 + \quad f_1x + \quad f_2x^2 + \quad f_3x^3 + \cdots + \quad f_nx^n + \\
-x \cdot G(x) & = & \quad + \quad -f_0x + -f_1x^2 + -f_2x^3 + \cdots + -f_{n-1}x^n + \\
-x^2 \cdot G(x) & = & \qquad\qquad + -f_0x^2 + -f_1x^3 + \cdots + -f_{n-2}x^n + \\
\hline
G(x) - xG(x) - x^2G(x) & = & f_0 + (f_1 - f_0)x + \quad 0x^2 + \quad 0x^3 + \cdots + \quad 0x^n +
\end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - x\,G(x) - x^2\,G(x) = x$

$\langle$ Car $f_0 = 0$ et $f_1 - f_0 = 1 - 1 = 1.\rangle$

Donc, on a $G(x)(1-x-x^2) = x$

Donc, on a $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Donc on a $G(x) = \frac{x}{(1-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})x)(1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})x)}$.

$\langle$ Les deux zéros de $p(x) = x^2 + -1 \cdot x - 1$ étant $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ $\rangle$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\rho_1 := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

et

$$\rho_2 := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Donc on a $\quad G(x) \; = \; \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)}.$

Étape 2 : On décompose la fonction G en fractions partielles.

On sait que

$$\frac{x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)} = \frac{A}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{B}{(1-\rho_2\,x)}$$

⟨ Théorème R.21 ⟩

Alors, on a

$$\frac{x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)} = \frac{A(1-\rho_2\,x)+B(1-\rho_1\,x)}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_1\,x)}$$

Ce qui implique

$$x = A(1 - \rho_2\, x) + B(1 - \rho_1\, x)$$

Donc

$$x = A - A\,\rho_2\, x + B - B\,\rho_1\, x$$

Autrement dit

$$0 \;+\; 1 \cdot x = (A + B) \;+\; (-A\,\rho_2 - B\,\rho_1) \cdot x$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= A + B && (3) \\ 1 &= -\rho_2 A + -\rho_1 B && (4) \end{aligned}$$

Donc

$$B = -A$$

Donc

$$1 = -\rho_2 A + -\rho_1 \cdot (-A)$$

Donc

$$1 = (-\rho_2 + \rho_1)\, A$$

Donc

$$A = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}$$

On a donc aussi

$$B = -\frac{1}{\rho_1 - \rho_2}$$

Donc

$$B = \frac{-1}{\rho_1 - \rho_2}$$

Conclusion :

$$\frac{x}{(1 - \rho_1\, x)\ (1 - \rho_2\, x)} = \frac{\frac{1}{\rho_1 - \rho_2}}{(1 - \rho_1\, x)} + \frac{\frac{-1}{\rho_1 - \rho_2}}{(1 - \rho_2\, x)}$$

Et comme

$$\begin{aligned}\rho_1 - \rho_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{-\sqrt{5}}{2} \\ &= \sqrt{5},\end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)} \\
&= \frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_2\,x)} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_2\,x)}
\end{aligned}
$$

Étape 3 : On trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question.

$$
\begin{aligned}
& G(x) \\
= \;& \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_1\, x)} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_2\, x)} \\
= \;& \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\rho_1 \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_1)^2 \cdot x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^3 \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^n \cdot x^n + \\
& + \frac{-1}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,\rho_2 \cdot x + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^2 \cdot x^2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^3 \cdot x^3 + \cdots + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^n \cdot x^n \\
= \;& \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\rho_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,\rho_2\right) \cdot x + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^2\right) \cdot x^2 + \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^3 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^3\right) \cdot x^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^n\right) \cdot x^n +
\end{aligned}
$$

Réponse :

La définition par terme général est

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\rho_1)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}} (\rho_2)^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Autrement dit :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

4. Résoudre une récurrence

Méthode 4 : le cas des relations de récurrence linéaires et homogènes

Définition R.24 Une relation de récurrence est dite *linéaire, homogène d'ordre* k si la formule permettant de calculer $n^{\text{ème}}$ terme de la suite est une combinaison linéaire des k termes précédents.

Exemple R.25 La relation de récurrence suivante est une relation linéaire, homogène d'ordre 4.

$$\begin{cases} a_0 = 9 \\ a_1 = \pi \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 54 \\ a_n = 8 \cdot a_{n-2} + 7 \cdot a_{n-4} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

Notons que la formule permettant de calculer a_n, le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite, est bien une combinaison linéaire des 4 termes précédents puisque

$$a_n = 0 \cdot a_{n-1} + 8 \cdot a_{n-2} + 0 \cdot a_{n-3} + 7 \cdot a_{n-4}.$$

Exemple R.26 La relation de récurrence de la suite de Fibonacci est une relation linéaire, homogène d'ordre 2.

Exemple R.27 La relation de récurrence d'une suite géométrique est une relation linéaire, homogène d'ordre 1.

On peut conclure du dernier exemple qu'il existe une formule permettant de résoudre très rapidement les relations de récurrence linéaire, homogène d'ordre 1 (Voir le théorème R.11). Le prochain résultat (Théorème R.28) nous donne une formule permettant de résoudre très rapidement les relations de récurrences linéaires, homogènes d'ordre 2.

Théorème R.28 ***Récurrences linéaires, homogènes d'ordre 2***

Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie récursivement par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_1 = b \\ a_n = r \cdot a_{n-1} + s \cdot a_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

où a, b, r et s sont des constantes réelles.

Soit $p(x) = x^2 - rx - s$ le polynôme caractéristique de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, et soient ρ_1 et ρ_2 les zéros de ce polynôme.

Alors, le terme général de la suite est

$$a_n = \begin{cases} A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot (\rho_2)^n & n : \mathbb{N} \quad \textit{si } \rho_1 \neq \rho_2 \\ A \cdot (\rho_1)^n + B \cdot n \cdot (\rho_1)^n & n : \mathbb{N} \quad \textit{si } \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

Où A et B sont deux constantes déterminées par les conditions initiales de la récurrence
(c.-à-d. : par $a_0 = a$ et $a_1 = b$).

Démonstration

Cas 1 : $\rho_1 \neq \rho_2$.

La démonstration pour ce cas est très semblable à la solution de l'exemple R.23.

Étape 1 : On exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle.

- On remarque que

$$a_n - r \cdot a_{n-1} - s \cdot a_{n-2} \;=\; 0 \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

- ce qui en extension donne :

$$
\begin{aligned}
a_2 - ra_1 - sa_0 &= 0 \\
a_3 - ra_2 - sa_1 &= 0 \\
a_4 - ra_3 - sa_2 &= 0 \\
a_5 - ra_4 - sa_3 &= 0
\end{aligned}
$$

etc...

- Posons

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Alors,

$$
\begin{array}{rcllllll}
G(x) & = & a_0 + & a_1x + & a_2x^2 + & a_3x^3 + \cdots + & a_nx^n + \cdot \\
-rx \cdot G(x) & = & + & -ra_0x + & -ra_1x^2 + & -ra_2x^3 + \cdots + & -ra_{n-1}x^n + \cdot \\
-sx^2 \cdot G(x) & = & & + & -sa_0x^2 + & -sa_1x^3 + \cdots + & -sa_{n-2}x^n + \cdot \\
\hline
G(x) - rxG(x) - sx^2G(x) & = & a_0 + (a_1 - ra_0)x + & & 0x^2 + & 0x^3 + \cdots + & 0x^n + \cdot
\end{array}
$$

Ce qui donne

$$G(x) - rx\,G(x) - sx^2\,G(x) = a_0 + (a_1 - ra_0)x$$

Donc, on a

$$G(x)(1 - rx - sx^2) \; = \; a_0 + (a_1 - ra_0)x$$

Donc, on a

$$G(x) \; = \; \frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{1 - rx - sx^2}$$

Donc on a

$$G(x) \; = \; \frac{a_0 + (a_1 - ra_0)x}{(1 - \rho_1\, x)\;(1 - \rho_2\, x)}$$

Étape 2 : On décompose la fonction G en fractions partielles.

On sait que

$$\frac{a_0 + (a_1 - r a_0)x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)} = \frac{A}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{B}{(1-\rho_2\,x)}$$

$\langle$ Théorème R.21.$\rangle$

Étape 3 : On trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question.

$$\begin{aligned}
G(x) &= \tfrac{A}{(1-\rho_1\, x)} + \tfrac{B}{(1-\rho_2\, x)} \\
&= A + A\,\rho_1 \cdot x + A\,(\rho_1)^2 \cdot x^2 + A\;(\rho_1)^3 \cdot x^3 + \cdots + A\;(\rho_1)^n \cdot x^n + \cdots \\
&\quad + \;\; B + B\;\rho_2 \cdot x + B\;(\rho_2)^2 \cdot x^2 + B\;(\rho_2)^3 \cdot x^3 + \cdots + B\;(\rho_2)^n \cdot x^n + \cdots \\
&= (A+B) + (A\;\rho_1 + B\;\rho_2) \cdot x + \big(A\;(\rho_1)^2 + B\;(\rho_2)^2\big) \cdot x^2 + \\
&\qquad\qquad + \big(A\;(\rho_1)^3 + B\;(\rho_2)^3\big) \cdot x^3 + \cdots\cdots + (A\;(\rho_1)^n + B\;(\rho_2)^n) \cdot x^n + \cdots
\end{aligned}$$

Conclusion : La définition par terme général est bien

$$a_n = A\,(\rho_1)^n + B\,(\rho_2)^n \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

Cas 2 : $\rho_1 = \rho_2$. *À faire en exercice.*

C.Q.F.D.

Exemple R.29 En utilisant le théorème R.28, résolvez la récurrence de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

Solution :

1.- Trouvons la «forme» du terme général de la suite.

Le polynôme caractéristique de la suite $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est $p(x) = x^2 - (1) \cdot x - (1)$.

Et les deux zéros de ce polynôme sont

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \rho_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Donc, par le théorème R.28,

la forme du terme général de la suite est

$$f_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où A et B sont deux constantes.

2.- Trouvons les valeurs des constantes A et B.

On sait que $$\begin{cases} A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = f_0 = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = f_1 = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne $$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

En résolvant, on trouve facilement que $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

3.- Réponse : Le terme général cherché est

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$