3. Résoudre une récurrence
Méthode 3 : par les séries génératrices

Dans cette section nous allons développer une méthode plus générale de résolution de récurrences, la méthode *par séries génératrices*.

3.1 L'idée de la méthode

Voici un exemple qui illustre son fonctionnement, nous développerons les outils nécessaires à son utilisation par la suite.

Exemple R.18 Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Résolvez cette récurrence.

- La somme

$$1 + 2 \cdot x + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + \cdots + 2^n \cdot x^n$$

est la somme des $n+1$ premiers de la suite géométrique

$$a_n = 1 \cdot (2x)^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

qui a premier terme 1 et raison $2x$. Par le théorème R.16, on a donc

$$\begin{aligned} & 1 + 2 \cdot x + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + \cdots + 2^n \cdot x^n \\ = \ & \frac{1 \cdot (1 - (2x)^{n+1})}{1 - 2x} \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $2x \in]-1, 1[$, c'est-à-dire que $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Alors on remarque facilement que dans ce cas, plus n devient grand, plus $(2x)^{n+1}$ se rapproche de 0.

Donc, si on fait tendre n vers l'infini, la partie droite de l'équation ci-dessus va tendre vers

$$\frac{1 \cdot (1-0)}{1-2x} = \frac{1}{1-2x} \ .$$

La partie de gauche de l'équation ci-dessus deviendra une somme contenant un nombre de plus en plus grand de termes, à la limite une somme contenant une infinité de termes.

Autrement dit, à la limite, lorsque $n \to \infty$, et si $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, l'équation ci-dessus devient

$$1+2 \cdot x+2^2 \cdot x^2+2^3 \cdot x^3+\cdots+2^n \cdot x^n+\ldots \ = \ \frac{1}{1-2x}$$

Il est intéressant de constater que la somme infinie $1 + 2 \cdot x + 2^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot x^3 + \cdots + 2^n \cdot x^n + \ldots$ est en fait une fonction de x, car pour tout $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Cette somme infinie coïncide avec la fonction rationnelle d'équation

$$y = \frac{1}{1 - 2x} \ .$$

Nous verrons bientôt en quoi ce résultat est intéressant pour notre problème.

- Généralisons le procédé de fabrication de ces sommes infinies.

  Fabriquons une nouvelle fonction G, définie à partir de notre suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début de cet exemple, de la manière suivante :

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Remarquons que, pour certaines valeurs de x, cette somme infinie sera elle aussi une fonction. Et que la fonction G encode en quelque sorte la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ puisque c'est la suite des coefficients de G.

- Rappelons-nous que

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \ ,$$

ce qui implique que

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 0 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \ ,$$

ce qui en extension donne :

$$\begin{gathered} a_1 - 2 \cdot a_0 = 0 \\ a_2 - 2 \cdot a_1 = 0 \\ a_3 - 2 \cdot a_2 = 0 \\ a_4 - 2 \cdot a_3 = 0 \\ \text{etc...} \end{gathered}$$

Maintenant, nous allons essayer d'utiliser cette relation de récurrence et nos connaissances en algèbre pour arriver à écrire la fonction G sous une forme plus simple.

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
G(x) & = & a_0 & + & a_1\,x & + & a_2\,x^2 & + & a_3\,x^3 & + & \cdots \\
-2x \cdot G(x) & = & & + & -2 \cdot a_0\,x & + & -2 \cdot a_1\,x^2 & + & -2 \cdot a_2\,x^3 & + & \cdots \\
\hline
G(x) - 2xG(x) & = & a_0 & + & 0\,x & + & 0\,x^2 & + & 0\,x^3 & + & \cdots
\end{array}
$$

Ce qui donne $G(x) - 2x \cdot G(x) \; = \; 1$ $\langle$ Car $a_0 = 1.$$\rangle$

Donc, on a $G(x)(1 - 2x) \; = \; 1$

Donc, on a $G(x) \; = \; \frac{1}{(1-2x)}$, ce qui est une forme beaucoup plus simple pour exprimer la fonction G.

- Pour terminer le problème, remarquons que nous connaissons déjà la série de puissances associée à

$$\frac{1}{(1-2x)}\ ,$$

c'est

$$1+2\cdot x+2^2\cdot x^2+2^3\cdot x^3+\cdots+2^n\cdot x^n+\cdots$$

On a donc

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
G(x) & = & a_0 & + & a_1\,x & + & a_2\,x^2 & + & a_3\,x^3 & + & \cdots & + & a_n\,x^n & + & \cdots \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \\
G(x) & = & 1 & + & 2\,x & + & 2^2\,x^2 & + & 2^3\,x^3 & + & \cdots & + & 2^n\,x^n & + & \cdots
\end{array}$$

Ce qui indirectement implique le résultat cherché :

$$a_n \;=\; 2^n \qquad \forall n : \mathbb{N}.$$

C.Q.F.D.

La deuxième solution est bien sûr nettement plus compliquée que la première, mais elle a l'avantage d'être généralisable à des résolutions de récurrence que la méthode utilisée dans la solution 1 ne saurait résoudre.

En effet, si on analyse les différentes étapes de la solution 2 :

1. On a, à partir de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, créé la série de puissances

   $$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

   cette série s'appelle en fait la *série génératrice* de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

2. En utilisant astucieusement la relation de récurrence qui définissait $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, on a réussi à exprimer G sous la forme d'une fonction rationnelle.

3. On a trouvé quelle était la série de puissance qui était associée à cette fonction rationnelle, et ainsi indirectement déterminé le terme général de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

De cette analyse, on peut résumer ainsi
la méthode de résolution de récurrence par séries génératrices :

Étape 1 : À partir de la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, construire la *série génératrice*

$$G(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots + a_n\,x^n + \cdots$$

Puis en se servant astucieusement de la relation de récurrence définissant $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, on exprime G sous la forme d'une fonction rationnelle.

Étape 2 : On décompose la fonction rationnelle trouvé à l'étape 1 en éléments plus simples de façon à ce que pour chacun de ces éléments, on connaisse la série de puissances qui lui est associée. Cette étape s'appelle la *décomposition en fractions partielles*.

Étape 3 : On recompose les différentes séries de puissances associées aux fonctions rationnelles trouvées à l'étape 2, de façon à obtenir la série de puissances associée à G, obtenant ainsi indirectement le terme général de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, résolvant ainsi la récurrence.

Mais avant de pouvoir efficacement résoudre des récurrences par cette méthode, il nous faut connaître plusieurs modèles de séries de puissances et savoir comment on décompose en fractions partielles.

3.2 Modèles de séries de puissances

Théorème R.19 *Soient* $a,\ b \in \mathbb{R} - \{0\}$, *alors* $\forall x \in \left]\frac{-1}{|b|}, \frac{1}{|b|}\right[$, *on a que*

- $\frac{a}{1-bx} = a + a\,b \cdot x + a\,b^2 \cdot x^2 + a\,b^3 \cdot x^3 + a\,b^4 \cdot x^4 + \cdots + a\,b^n \cdot x^n + \cdots$

- $\frac{a}{(1-bx)^2} = a + 2a\,b \cdot x + 3a\,b^2 \cdot x^2 + 4a\,b^3 \cdot x^3 + \cdots + (n+1)a\,b^n \cdot x^n + \cdots$

- $\frac{ax}{(1-bx)^2} = 0 + a \cdot x + 2a\,b \cdot x^2 + 3a\,b^2 \cdot x^3 + 4a\,b^3 \cdot x^4 + \cdots + n\,a\,b^{n-1} \cdot x^n + \cdots$

- $\frac{a}{(1-bx)^3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot a}{2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot a \cdot b}{2}\,x + \frac{4 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2}{2}\,x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot a \cdot b^3}{2}\,x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1) \cdot a \cdot b^n}{2}\,x^n + \cdots$

En particulier, nous avons donc les séries de puissances suivantes.

Théorème R.20

- $\frac{1}{1-x} \quad = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$

- $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$
  $= 1 + (-1)x + (-1)^2x^2 + (-1)^3x^3 + (-1)^4x^4 + \cdots$
  $+ (-1)^n x^n + \cdots$

- $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)\, x^n + \cdots$

- $\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + n\,x^n + \cdots$

- $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2}\,x + \frac{4\cdot 3}{2}\,x^2 + \frac{5\cdot 4}{2}\,x^3 + \cdots + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,x^n + \cdots$

3.3 Décomposer une fonction rationnelle en fractions partielles

Théorème R.21 *Voici la forme de décomposition en fractions partielles de chacune des familles de fonctions rationnelles suivantes :*

- $\frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f}$

  Pourvu que $y = cx + d$ *et* $y = ex + f$ *aient des zéros différents.*

- $\frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{(cx+d)^2}$

- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)(fx+g)(hx+i)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{fx+g} + \frac{C}{hx+i}$

  Pourvu que $y = dx + e$, $y = fx + g$ *et* $hx + i$ *aient des zéros tous différents.*

- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^2(fx+g)} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{fx+g}$

  Pourvu que $y = dx + e$ *et* $y = fx + g$ *aient des zéros différents.*

- $\frac{ax^2+bx+c}{(dx+e)^3} = \frac{A}{dx+e} + \frac{B}{(dx+e)^2} + \frac{C}{(dx+e)^3}$

3.4 Exemples de résolution de récurrence par la méthode des séries génératrices

Exemple R.22 Résolvez la récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4^n \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Solution :

Étape 1 : On exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle

- On remarque que :

$$a_n - 3 \cdot a_{n-1} - (4^n) = 0 \quad \forall n : \mathbb{N}^*$$

- ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} a_1 - 3 \cdot a_0 - 4 &= 0 \\ a_2 - 3 \cdot a_1 - 4^2 &= 0 \\ a_3 - 3 \cdot a_2 - 4^3 &= 0 \\ a_4 - 3 \cdot a_3 - 4^4 &= 0 \end{aligned}$$

etc...

- Posons $G(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots + a_n\,x^n + \cdots$.

Alors,

$$
\begin{array}{rcccccc}
G(x) & = & a_0 & + & a_1 x + & a_2 x^2 + & a_3 x^3 + \cdots + \\
-3x \cdot G(x) & = & & + & -3 \cdot a_0 x + & -3 \cdot a_1 x^2 + & -3 \cdot a_2 x^3 + \cdots + -3 \cdot \\
-\frac{1}{1-4x} & = & -1 & + & -4x + & -(4^2)x^2 + & -(4^3)x^3 + \cdots + \quad - \\
\hline
G(x) - 3xG(x) - \frac{1}{1-4x} & = & a_0 - 1 & + & 0x + & 0x^2 + & 0x^3 + \cdots +
\end{array}
$$

Ce qui donne $G(x) - 3x\,G(x) - \frac{1}{1-4x} = 0$

$\langle$ Car $\quad a_0 - 1 = 1 - 1 = 0.\rangle$

Donc, on a $\quad G(x)(1-3x) \;=\; \frac{1}{1-4x}$

Donc, on a $\quad G(x) \;=\; \frac{1}{(1-3x)(1-4x)}$,

ce qui est une forme beaucoup plus simple pour exprimer la fonction G.

Étape 2 : On décompose la fonction G en fractions partielles.

On sait que

$$\frac{1}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-4x}$$

$\langle$ Théorème R.21.$\rangle$

Alors, on a

$$\frac{1}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{A(1-4x) + B(1-3x)}{(1-3x)(1-4x)}$$

Ce qui implique

$$1 = A(1 - 4x) + B(1 - 3x)$$

Donc

$$1 = A \cdot 1 - 4Ax + B \cdot 1 - 3Bx$$

Donc

$$0x + 1 = (-4A - 3B)x + (A + B)$$

Ce qui donne

$$\begin{align} 1 &= A + B \tag{1} \\ 0 &= -4A + 3B \tag{2} \end{align}$$

Donc

$$1 - B = A$$

Donc

$$0 = -4(1 - B) - 3B$$

Donc

$$0 = -4 + 4B - 3B$$

Donc

$$0 = -4 + B$$

Donc

$$B = 4$$

$$A = 1 - 4 = -3$$

Conclusion :

$$\frac{1}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1-4x}$$

Étape 3 : On trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question.

$$
\begin{aligned}
& G(x) \\
= \;& \frac{1}{(1-3x)(1-4x)} \\
= \;& \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1-4x} \\
= \;& -3 + (-3)\,3\cdot x + (-3)\,3^2\cdot x^2 + (-3)\,3^3\cdot x^3 + \cdots + (-3)\,3^n\cdot x^n + \cdots \\
& + \;\; 4 + (4)\,4\cdot x + (4)\,4^2\cdot x^2 + (4)\,4^3\cdot x^3 + \cdots + (4)\,4^n\cdot x^n + \cdots \\
= \;& -3 + -(3^2)\cdot x + -(3^3)\cdot x^2 + -(3^4)\cdot x^3 + \cdots + -(3^{n+1})\cdot x^n + \cdots \\
& + \;\; 4 + 4^2\cdot x + 4^3\cdot x^2 + 4^4\cdot x^3 + \cdots + 4^{n+1}\cdot x^n + \cdots \\
= \;& (-3+4) + (-(3^2)+4^2)\cdot x + (-(3^3)+4^3)\cdot x^2 + (-(3^4)+4^4)\cdot x^3 + \\
& \cdots + (-(3^{n+1})+4^{n+1})\cdot x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

Réponse : La définition par terme général est

$$a_n \ = \ -(3^{n+1}) + 4^{n+1} \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.23 Résolvez la récurrence de Fibonacci :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

Solution :

Étape 1 : On exprime la série génératrice sous la forme d'une fonction rationnelle.

- On remarque que :

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0 \qquad \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

- ce qui en extension donne :

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 - f_0 &= 0 \\ f_3 - f_2 - f_1 &= 0 \\ f_4 - f_3 - f_2 &= 0 \\ f_5 - f_4 - f_3 &= 0 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

- Posons $G(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots + f_n x^n + \cdots$.

Alors,

$$\begin{array}{rcl}
G(x) & = & f_0 + \quad f_1 x + \quad f_2 x^2 + \quad f_3 x^3 + \cdots + \quad f_n x^n + \\
-x \cdot G(x) & = & \quad + \quad -f_0 x + -f_1 x^2 + -f_2 x^3 + \cdots + -f_{n-1} x^n + \\
-x^2 \cdot G(x) & = & \qquad\qquad + -f_0 x^2 + -f_1 x^3 + \cdots + -f_{n-2} x^n + \\
\hline
G(x) - xG(x) - x^2 G(x) & = & f_0 + (f_1 - f_0)x + \quad 0x^2 + \quad 0x^3 + \cdots + \quad 0x^n +
\end{array}$$

Ce qui donne $G(x) - x\,G(x) - x^2\,G(x) = x$

$\langle$ Car $f_0 = 0$ et $f_1 - f_0 = 1 - 1 = 1.\rangle$

Donc, on a $G(x)(1 - x - x^2) = x$

Donc, on a $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Donc on a $G(x) = \frac{x}{(1-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})x)(1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})x)}$.

$\langle$ Les deux zéros de $p(x) = x^2 + -1 \cdot x - 1$ étant $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ $\rangle$

Pour simplifier l’écriture, posons

$$\rho_1 := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

et

$$\rho_2 := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Donc on a $G(x) = \frac{x}{(1-\rho_1 x)(1-\rho_2 x)}$.

Étape 2 : On décompose la fonction G en fractions partielles.

On sait que

$$\frac{x}{(1-\rho_1 x)\,(1-\rho_2 x)} = \frac{A}{(1-\rho_1 x)} + \frac{B}{(1-\rho_2 x)}$$

⟨ Théorème R.21 ⟩

Alors, on a

$$\frac{x}{(1-\rho_1 x)\,(1-\rho_2 x)} = \frac{A(1-\rho_2 x) + B(1-\rho_1 x)}{(1-\rho_1 x)\,(1-\rho_1 x)}$$

Ce qui implique

$$x = A(1 - \rho_2\, x) + B(1 - \rho_1\, x)$$

Donc

$$x = A - A\,\rho_2\, x + B - B\,\rho_1\, x$$

Autrement dit

$$0 \,+\, 1 \cdot x = (A + B) \,+\, (-A\,\rho_2 - B\,\rho_1) \cdot x$$

Ce qui donne

$$0 = A + B \tag{3}$$

$$1 = -\rho_2 A + -\rho_1 B \tag{4}$$

Donc

$$B = -A$$

Donc

$$1 = -\rho_2 A + -\rho_1 \cdot (-A)$$

Donc

$$1 = (-\rho_2 + \rho_1)\, A$$

Donc

$$A = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}$$

On a donc aussi

$$B = -\frac{1}{\rho_1 - \rho_2}$$

Donc

$$B = \frac{-1}{\rho_1 - \rho_2}$$

Conclusion :

$$\frac{x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)} = \frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_2\,x)}$$

Et comme

$$
\begin{aligned}
\rho_1 - \rho_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{-\sqrt{5}}{2} \\
&= \sqrt{5},
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \frac{x}{(1-\rho_1\,x)\,(1-\rho_2\,x)} \\
&= \frac{\frac{1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\rho_1-\rho_2}}{(1-\rho_2\,x)} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_2\,x)}
\end{aligned}
$$

Étape 3 : On trouve la série de puissances associée à G et on répond à la question.

$$
\begin{aligned}
& G(x) \\
= \ & \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_1\,x)} + \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{(1-\rho_2\,x)} \\
= \ & \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\rho_1 \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_1)^2 \cdot x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_1)^3 \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_1)^n \cdot x^n + \\
& + \frac{-1}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{\sqrt{5}}\rho_2 \cdot x + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\rho_2)^2 \cdot x^2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\rho_2)^3 \cdot x^3 + \cdots + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\rho_2)^n \cdot x^n \\
= \ & \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\rho_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}}\rho_2\right) \cdot x + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_1)^2 + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\rho_2)^2\right) \cdot x^2 + \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_1)^3 + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\rho_2)^3\right) \cdot x^3 + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_1)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}(\rho_2)^n\right) \cdot x^n +
\end{aligned}
$$

Réponse :

La définition par terme général est

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\rho_1)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}\,(\rho_2)^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Autrement dit :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$