MAT-22257

⟨⟨ *Résolution de récurrences*⟩⟩

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons des problèmes reliés à la notion de *suite*.

Par exemple,

$$\langle 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \rangle$$

est la représentation en extension de la suite des entiers naturels pairs ou encore

$$\langle 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots \rangle$$

celle des carrés parfaits.

Voici un exemple plus complexe, connu sous le nom de suite de Fibonacci :

$$\langle 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots \rangle$$

De façon générale, la suite

$$\langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots \rangle$$

se notera $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

Il est à noter qu'une telle suite est en fait une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, on peut donc la représenter $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & a_n \end{array}$$

Une suite «a_n» ne commence pas nécessairement par l'indice 0, elle peut commencer par l'indice 1 ou par tout autre élément $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, la suite serait

$$\left\langle a_{n_0},\, a_{n_0+1},\, a_{n_0+2},\, a_{n_0+3},\, a_{n_0+4},\, \ldots \right\rangle$$

et se noterait

$$\langle a_n \rangle_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq n_0}}$$

Dans ce cas, on peut représenter la suite par l'ap-

plication $\quad f \; : \; \begin{array}{ccc} \{n : \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a_n \end{array}$

Une suite peut donc être définie en extension, exemple :

$$\langle 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots \rangle$$

ou (de façon plus rigoureuse) en compréhension, exemple :

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

On présente généralement une définition par terme général d'une suite en donnant simplement la formule générique permettant de calculer **directement** n'importe quel terme de la suite.

Exemple : *Le terme général de la suite* $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *des entiers naturels pairs est*

$$a_n = 2n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Il y a une autre façon de définir une suite : **la définition par récurrence**.

La suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ des entiers naturels pairs peut se définir récursivement par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

La suite de Fibonacci $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ se définit récursivement par

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \forall n : \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \end{cases}$$

Nous verrons au cours de ce chapitre que le terme général de la suite de Fibonacci est

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le concept de suite se retrouve au centre de l'analyse de plusieurs problèmes en mathématiques et en informatique. On le retrouve entre autres lorsque l'on s'intéresse au nombre total d'étapes qu'un algorithme doit accomplir, ou plus exactement lorsque l'on cherche à calculer le *temps d'exécution* t_n d'un programme en fonction d'un certain paramètre n qui est généralement relié à la taille de la donnée d'entrée.

Exemple R.1 Considérons l'algorithme suivant :

$$
\begin{array}{l}
l \leftarrow 0 \\
\textbf{Pour} \quad i \leftarrow 1 \text{ à } n \quad \textbf{Faire} \\
\qquad \textbf{Pour} \quad j \leftarrow 1 \text{ à } i \quad \textbf{Faire} \\
\qquad\qquad l \leftarrow l + 1
\end{array}
$$

Ici, se demander quel sera (en fonction du paramètre n) le nombre total d'étapes d'exécution de l'algorithme revient en gros à se demander quelle sera la valeur finale de la variable l en fonction du paramètre n.

Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ la suite qui, pour chaque n, donne cette valeur finale. Alors on remarque facilement que

- $a_0 = 0$

Et que

- $a_n = a_{n-1} + n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre une récurrence
Méthode 1 : «deviner» la solution et la vérifier par induction mathématique

Dans plusieurs cas plus complexes, c'est encore la seule façon connue à ce jour.

Le principe d'induction mathématique s'énonce de plusieurs façons, la forme la plus couramment utilisée étant :

Théorème R.2 Principe d'induction mathématique faible.

Étant donné un prédicat P. Alors,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n) \Rightarrow P(n+1))) \;\Rightarrow\; (\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n))$

ou, ce qui est équivalent,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N} \mid P(n) \,:\, P(n+1))) \;\Rightarrow\; (\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n))$

ou, ce qui est équivalent,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N}^* \mid: P(n-1) \Rightarrow P(n))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} \mid: P(n))$

ou, ce qui est équivalent,

$(P(0) \wedge (\forall n : \mathbb{N}^* \mid P(n-1) : P(n))) \Rightarrow (\forall n : \mathbb{N} \mid: P(n))$

Exemple R.3 Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démontrez que $a_n = n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Prenons le prédicat

$$\mathrm{P}(n) : a_n = n^2$$

Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \mid : \mathrm{P}(n))$.
Et par le principe d'induction mathématique,

il suffit de démontrer que

$$\mathrm{P}(0) \;\wedge\; (\forall n : \mathbb{N}^* \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$$

Montrons $\mathbf{P(0)}$. (*C'est-à-dire, montrons* $a_0 = 0^2$).

$a_0 = 0 = 0^2$.

Montrons $(\forall \mathbf{n} : \mathbb{N}^* \mid \mathbf{P(n-1)} : \mathbf{P(n)})$.

Soit $n : \mathbb{N}^*$, choisi tel que $\mathrm{P}(n-1)$ est vrai. (*C'est-à-dire, tel que* $a_{n-1} = (n-1)^2$.)

$\langle$ Et montrons $\mathrm{P}(n)$. (*c'est à dire* $a_n = n^2$.) $\rangle$

a_n

$=$ $\langle$ Définition de $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.$\rangle$

$a_{n-1} + 2n - 1$

$=$ $\langle$ Hypothèse d'induction.$\rangle$

$(n-1)^2 + 2n - 1$

$=$ $\langle$ Développement d'un trinôme carré parfait.$\rangle$

$(n^2 - 2n + 1) + 2n - 1$

$=$ $\langle$ Simplification algébrique.$\rangle$

n^2

On a démontré $(\forall n : \mathbb{N}^* \mid \mathrm{P}(n-1) : \mathrm{P}(n))$.

Conclusion : on a bien $(\forall n : \mathbb{N} \mid : \mathrm{P}(n))$,

c'est-à-dire : $a_n = n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

C.Q.F.D.

Il est important de préciser que la preuve par induction mathématique faible peut ne pas être utilisable dans certains cas, notamment par exemple lorsque la suite définie par récurrence ne commence pas à l'indice 0, ou lorsque dans la relation de récurrence on calcule le terme a_n en fonction de plusieurs de ses prédécesseurs. Voici donc deux des nombreuses autres variantes du principe d'induction mathématique.

Théorème R.4

Principe d'induction mathématique faible sur

$$\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$$

Étant donné un prédicat P. Alors,

$$(P(n_0) \ \wedge \ (\forall n : \mathbb{N} \mid \ n_0 < n \ \wedge \ P(n-1) : P(n)))$$

$$\Rightarrow$$

$$(\forall n : \mathbb{N} \mid n_0 \leq n : P(n))$$

Théorème R.5
Principe d'induction mathématique à deux cas de base.
Étant donné un prédicat P. Alors,

$$(P(0) \wedge P(1) \wedge (\forall n : \mathbb{N}-\{0, 1\} \mid P(n-2) \wedge P(n-1) : P(n)))$$

$$\Rightarrow$$

$$(\forall n : \mathbb{N} \mid : P(n))$$

Exemple R.6 *La suite de Fibonacci*

Soit $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} & \forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \end{cases}$$

Démontrez que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Démonstration Prenons le prédicat

$$\mathrm{P}(n) :\ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \in$$

Alors nous devons démontrer que $(\forall n : \mathbb{N} \mid \mathrm{P}(n))$.

Et par le principe d'induction mathématique à deux cas de base,
il suffit de démontrer que

$$\mathrm{P}(0) \wedge \mathrm{P}(1) \wedge (\forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \mid \mathrm{P}(n-1) \wedge \mathrm{P}(n-2) : \mathrm{P}($$

Avant de démontrer cet énoncé, nous avons besoin de la remarque suivante :

Remarque ($*$) : les deux nombres $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les deux zéros du polynôme

$$y = x^2 - x - 1$$

Donc, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les deux seuls nombres réels satisfaisant l'équation $0 = x^2 - x - 1$, et donc l'équation $x + 1 = x^2$. Autrement dit, additionner 1 à l'un de ces deux nombres est équivalent à l'élever au carré.

Montrons $\mathbf{P(0)}$. *C'est-à-dire, montrons*

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

$$f_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0.$$

Montrons $\mathbf{P}(1)$. *C'est-à-dire, montrons*

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= 1 \\
&= f_1
\end{aligned}
$$

Montrons $(\forall \boldsymbol{n} : \mathbb{N} - \{0, 1\} \mid \mathrm{P}(\boldsymbol{n} - 1) \wedge \mathrm{P}(\boldsymbol{n} - 2) : \mathrm{P}(\boldsymbol{n})$

Soit $n : \mathbb{N} - \{0, 1\}$, choisi tel que $\mathrm{P}(n - 1)$ et $\mathrm{P}(n - 2)$ sont vrais.

C'est-à-dire, tel que

$$f_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

et tel que

$$f_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-2}$$

Montrons $\mathrm{P}(n)$, c'est-à-dire

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

f_n

$=$ $\langle$ Définition de $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$. $\rangle$

$f_{n-1} + f_{n-2}$

$=$ $\langle$ Hypothèses d'induction. $\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$+ \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$=$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$=$ ⟨ Mise en évidence double.⟩

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

$=$ ⟨ Remarque ($*$), deux fois.⟩

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$

$=$ ⟨ Propriété des exposants.⟩

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

On a démontré

$$(\forall n : \mathbb{N} - \{0, 1\} \mid P(n-1) \wedge P(n-2) : P(n))$$

Conclusion : on a bien $(\forall n : \mathbb{N} \mid \mathrm{P}(n))$,

c'est-à-dire :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant certains que le terme général de la suite de Fibonacci est

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mais si ce terme général ne nous avait pas été donné gratuitement, nous aurions été tous incapables de le deviner. Il nous faut donc de nouveaux outils pour résoudre des récurrences, c'est le propos des prochaines sections.

2. Résoudre une récurrence
Méthode 2 : quatre cas particuliers

Nous nous intéressons dans cette section à quatre familles particulières de suites. Pour chacune des suites appartenant à une de ces familles, le terme général est facile à trouver.

Définition R.7 Les suites arithmétiques.

On dit qu'une suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* de *premier terme* a et de *différence* d si

- $a_0 = a$
- la différence entre la valeur du terme a_n et celle du terme a_{n-1} est égale à $d \quad \forall n : \mathbb{N}^*$

Théorème R.8 *Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme a et de différence d.*

2. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par*

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

3. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général par :*

$$a_n = a + nd \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.9 La suite des nombre pairs que nous avons vue en introduction est une suite arithmétique de premier terme $a = 0$ et de différence $d = 2$, et on a bien que

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \quad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et que

$$a_n = n \cdot 2 \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Définition R.10 **Les suites géométriques.**

On dit qu'une suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est *géométrique* de *premier terme* a et de *raison* r si

- $a_0 = a$
- le rapport entre la valeur du terme a_n et celle du terme a_{n-1} est égale à $r \quad \forall n : \mathbb{N}^*$

Théorème R.11 *Soit $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme a et de raison r.*

2. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par*

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot r \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

3. *$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par terme général par :*

$$a_n = a \cdot r^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.12 La suite des puissances de 2, c'est-à-dire $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots \rangle$, est une suite géométrique de premier terme $a = 1$ et de raison $r = 2$, et on a bien que

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot 2 \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et que

$$a_n \ = \ 1 \cdot 2^n \quad \forall n : \mathbb{N}$$

Définition R.13 La suite des sommes de premiers termes d'une suite.

Soit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

On appelle *suite des sommes de premiers termes* de la suite $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ la suite

$$\langle\, a_0, (a_0 + a_1), (a_0 + a_1 + a_2),\ \ldots,\ (a_0 + a_1 + \cdots + a_n),\ \ldots \rangle$$

Ou, autrement dit, la suite $\langle S_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} S_0 \;=\; a_0 \\ S_n \;=\; S_{n-1} + a_n \qquad \forall n : \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Théorème R.14 *Soit* $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$*, une suite arithmétique de premier terme* a *et de différence* d *et soit* $\langle S_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite des sommes de premiers termes de la suite* $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$*. Alors* $\langle S_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *est définie par terme général par :*

$$S_n = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.15 Calculez $1+2+3+4+\cdots+100$.

Solution : Remarquons que $1+2+3+4+\cdots+100$ est une somme de premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de différence 1.

Notons cette suite arithmétique $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors par le théorème R.8, on a $a_n = 1+n\cdot 1 \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$1+2+3+4+\cdots+100$$

$$= \qquad \langle \text{ Car } a_n = 100 \text{ si } n+1 = 100\text{, et donc si } n = 99.\rangle$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99}$$

$$= \qquad \langle \text{ Théorème R.14.}\rangle$$

$$\frac{(a_0+a_{99})(99+1)}{2}$$

$$=$$

$$\frac{(1+100)(99+1)}{2}$$

$$=$$

$$5050.$$

C.Q.F.D.

Théorème R.16 *Soit* $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de premier terme* a *et de raison* $r \neq 1$ *et soit* $\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des sommes de premiers termes de la suite* $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$*. Alors,*

$\langle S_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par terme général par :*

$$S_n = \frac{a \cdot (1 - r^{n+1})}{1 - r} \qquad \forall n : \mathbb{N}$$

Exemple R.17 Calculez $8+16+32+64+128+\cdots+1\,048\,576$.

Solution : Remarquons que $8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots + 1\,048\,576$ est une somme de premiers termes de la suite géométrique de premier terme 8 et de raison 2.

Notons cette suite arithmétique $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors par le théorème R.11, on a $a_n = 8 \cdot 2^n \quad \forall n : \mathbb{N}$.

Ainsi

$$8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots + 1\,048\,576$$

$$= \left\langle \begin{array}{r} \text{Car, si } a_n = 1\,048\,576, \quad \text{alors } 8 \cdot 2^n = 1\,048\,576, \\ \text{et donc } \; 2^n = 131\,072 \\ \text{et donc } \; n = \log_2(131\,072) = 17 \end{array} \right\rangle^{*}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{17}$$

$$= \qquad \langle \text{ Théorème R.16.} \rangle$$

$$\frac{8 \cdot (1 - 2^{17+1})}{1 - 2}$$

$$=$$

$$2\,097\,144.$$

C.Q.F.D.

*Rappelons que $\log_2(A) = \frac{\log_{10}(A)}{\log_{10}(2)}$