3.5 “plus d’éléments” que $\mathbb{N}$: les ensembles non dénombrables

À première vue, on aurait pu croire que tous les ensembles étaient dénombrables puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable et même $\mathbb{Q}$ l’est. Cependant, nous allons voir que $\mathbb{R}$, lui, ne l’est pas.

Le prochain théorème est dû à Cantor, le père de cette théorie.

Théorème I.22 (Cantor) *Pour tout ensemble A,*

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Démonstration (par contradiction)

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble A tel que $|A| \geq |\mathcal{P}(A)|$. Et cherchons une contradiction.

Soit donc A un tel ensemble.

Soit $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, une application surjective.

$\langle$ Une telle application existe, voir Théorème I.11. $\rangle$

Soit $T := \{a : A \mid a \not\in f(a)\}$.

Remarquons que $T \subseteq A$ et donc que $T \in \mathcal{P}(A)$.

Soit $a_0 : A$, choisi tel que $f(a_0) = T$

$\langle$ Une tel a_0 existe car f est surjectif. $\rangle$

Alors il y a deux cas à considérer.

Cas 1 : $a_0 \in T$.

Alors $a_0 \notin f(a_0)$. $\langle$ Définition de T. $\rangle$

Ce qui implique que $a_0 \notin T$. $\langle$ Car $f(a_0) = T$. $\rangle$

Dans ce premier cas on a donc à la fois que $a_0 \in T$ et que $a_0 \notin T$,

ce qui est une **contradiction**.

Cas 2 : $a_0 \notin T$.

Alors $\neg(a_0 \notin f(a_0))$. $\langle$ Définition de T. $\rangle$

Ce qui implique que $(a_0 \in f(a_0))$.

$\langle$ Définition de $\notin$ et **(3.15)–Double négation** $\neg\neg p \equiv p$. $\rangle$

Ce qui implique que $a_0 \in T$. $\langle$ Car $f(a_0) = T$. $\rangle$

Dans ce deuxième et dernier cas on a aussi à la fois

que $a_0 \in T$ et que $a_0 \notin T$,

ce qui est donc ici aussi une **contradiction**.

Le fait que nous obtenions une contradiction dans chacun des deux cas, nous permet de conclure qu'on ne pouvait pas supposer le contraire.
Si on ne peut supposer le contraire de l'énoncé

$$(\forall A : \text{Ensemble} \mid : |A| < |\mathcal{P}(A)|),$$

c'est qu'il est vrai.

C.Q.F.D.

Définition I.23 Étant donnés deux ensembles A et B, on définit B^A comme étant l'ensemble de **toutes** les applications de A vers B.

Autrement dit : $B^A = \{f : A \longrightarrow B \mid \}$.

Proposition I.24 *Pour tout ensemble A, on a*

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A|.$$

Démonstration Soit l'application G suivante :

$$\begin{array}{rccc} G \ : & \{0,1\}^A & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ & f:A\longrightarrow\{0,1\} & \longmapsto & \{a:A \mid f(a)=1\} \end{array}$$

On note que G est bien définie (c'est-à-dire, elle est bien une relation totale et déterministe), car pour toute application $f \in \{0,1\}^A$,

$$G(f) = \{a : A \mid f(a) = 1\}$$

est bien un élément de $\mathcal{P}(A)$ puisque c'est un sous-ensemble de A.

Il existe donc pour chaque application $f \in \operatorname{Dom} G$, **un** et **un seul** élément de $\mathcal{P}(A)$ qui est en G-relation avec f. G est donc une application.

Démontrons que G est injectif et surjectif.

Injectivité. Il faut démontrer que

$$\left(\forall f_1, f_2 \in \{0,1\}^A \mid f_1 \neq f_2 : G(f_1) \neq G(f_2)\right).$$

Soit $f_1, f_2 \in \{0,1\}^A$, choisis tels que $f_1 \neq f_2$.

Soit $x \in A$ choisi tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$.

$\langle$ Un tel x existe car $f_1 \neq f_2$. $\rangle$

Comme l'ensemble d'arrivée de f_1 et celui de f_2 sont tous deux égaux à $\{0,1\}$, **sans perte de généralités** nous pouvons supposer que $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 1$.

Ce qui implique que $x \notin \{a : A \mid f_1(a) = 1\}$

et que $x \in \{a : A \mid f_2(a) = 1\}$.

On a donc $x \notin G(f_1)$ et $x \in G(f_2)$.

Ce qui implique $G(f_1) \neq G(f_2)$.

$\langle$ Car $G(f_1)$ et $G(f_2)$ sont deux ensembles et ils n'ont pas exactement les mêmes éléments. $\rangle$

G est donc injectif.

Surjectivité Il faut démontrer que

$$(\forall B : \mathcal{P}(A) \mid: (\exists f_B \in \{0,1\}^A \mid: G(f_B) = B)).$$

Soit $B : \mathcal{P}(A)$. $\langle$ Notons que $B \subseteq A$. $\rangle$

$$\text{Soit } f_B : \begin{array}{ccl} A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ a & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin B. \\ 1 & \text{si } a \in B. \end{cases} \end{array}$$

L'application f_B est bien définie car pour chaque élément a, ou bien $a \in B$ ou bien $a \notin B$. Ce qui ici implique que a est en f_B-relation avec **un** et **un seul** élément de $\{0,1\}$.

f_B est donc bien une application (c.-à-d. : totale et déterministe).

De plus,

$$
\begin{array}{lll}
G(f_B) & & \\
\quad = & \{a : A \mid f_B(a) = 1\} & \langle \text{ Définition de } G. \rangle \\
\quad = & \{a : A \mid a \in B\} & \langle \text{ Définition de } f_B. \rangle \\
\quad = & B. & \langle \text{ Car } B \subseteq A. \rangle
\end{array}
$$

G est donc surjectif.

G est donc une application bijective de $\{0, 1\}^A$ vers $\mathcal{P}(A)$.

Ce qui implique que $|\{0, 1\}^A| = |\mathcal{P}(A)|$.

C.Q.F.D.

Corollaire I.25 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *est un ensemble non dénombrable.*

Le résultat précédent se généralise au résultat suivant :

Théorème I.26 *Soient A un ensemble ayant au moins deux éléments et B un ensemble infini. Alors A^B est un ensemble non dénombrable.*

Nous ne ferons pas la démonstration du théorème I.26, mais nous allons illustrer l'essentiel des idées qui lui sont rattachées en solutionnant l'exemple suivant :

Exemple I.27 Démontrons que $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable.

Solution 1 :

Remarquons que toute application qui est **élément de**

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

(*l'ensemble de toutes les applications dont le domaine est* $\mathbb{N}$ *et l'image est inclus dans* $\{0,1\}$)
peut aussi être interprété comme un **élément de**

$$\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$$

(*l'ensemble de toutes les applications dont le domaine est* $\mathbb{N}$ *et l'image est inclus dans* $\{0,1,2\}$).

Autrement dit, il y a une application injective “canonique” de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Ce qui implique que $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}|$.

Comme en plus on a démontré au cours que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable (voir Théorème 3.16 et 3.14.), nous avons donc que $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ est également non dénombrable.

$\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$, l’ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ vers $\{0, 1, 2\}$ est donc non dénombrable. C.Q.F.D.

Solution 2 : la solution la plus rigoureuse.

Nous allons montrer que $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}|$ en construisant explicitement une application injective de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$, et comme on sait par le corollaire I.25 que l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est non dénombrable, nous aurons alors montré que $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ est également non dénombrable.

Pour démontrer $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}|$, nous allons construire une application injective H de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccc} H & : & \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \\ & & \left(\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & n & \longmapsto & f(n) \end{array}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccccc} H(f) & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0,1,2\} \\ & & n & \longmapsto & f(n) \end{array}\right) \end{array}$$

Autrement dit, étant donné une application f *de* $\mathbb{N}$ *vers* $\{0,1\}$, $H(f)$ *est l'application de* $\mathbb{N}$ *vers* $\{0,1,2\}$ *qui a* **la même règle de correspondance** *que* f.

On note que H est bien définie (c'est-à-dire, elle est bien une relation totale et déterministe), car il existe pour chaque application $f \in \operatorname{Dom} H$, **un** et **un seul** élément de $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}^{\mathbb{N}}$ qui est en H-relation avec f.

H est donc une application, il ne reste donc qu'à démontrer qu'elle est injective.

Il faut donc démontrer que

$$\Big(\forall f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid f_1 \neq f_2 : H(f_1) \neq H(f_2)\Big) .$$

Soit $f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, choisis tels que $f_1 \neq f_2$.

Soit $x \in \mathbb{N}$ choisi tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$.

$\langle$ Un tel x existe car $f_1 \neq f_2$. $\rangle$

Alors $H(f_1)(x) = f_1(x)$ $\langle$ Par la définition de H. $\rangle$

Et $H(f_2)(x) = f_2(x)$ $\langle$ Par la définition de H. $\rangle$

On a donc $H(f_1)(x) \neq H(f_2)(x)$

$\langle$ Puisque $f_1(x) \neq f_2(x)$. $\rangle$

On a donc $H(f_1) \neq H(f_2)$

C.Q.F.D.

Avant d'énoncer le prochain théorème, nous devons faire un rappel sur les nombres réels.

Rappel I.28

La représentation base 10 d'un nombre réel est de la forme

$$b_n\, b_{n-1} \ldots b_1\, b_0,\;\; a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$$

où les b_j et les a_i sont des chiffres de 0 à 9.

Exemple : $\frac{8}{3} = 2,666\ldots$

Cependant, cette représentation n'est pas unique.
En effet, le nombre $0,213$ par exemple peut être représenté par $0,213000\ldots$ et par $0,212999\ldots$

Pour éviter toute ambiguïté, nous allons supposer ici que nous ne représenterons jamais un nombre réel par une représentation base 10 qui se terminerait par une séquence infinie de 9.

En particulier, **chacun** des nombres de l'intervalle $[0, 1[$ aura une **unique** représentation base 10 de la forme

$$0,\ a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots,$$

où chacun des a_i est un chiffre de 0 à 9 et qui ne se termine pas par une séquence infinie de 9.

Histoire de bien comprendre ce problème de la non unicité de la représentation en base 10, voici la démonstration que $0,9999\ldots = 1$ *et la démonstration que* $0,212999\ldots = 0,213000\ldots$*:*

Démontrons que $0,9999\ldots = 1$**.**

Posons $x := 0,\ 9999\ldots.$

Alors on a
$$\begin{array}{rcl} 10\,x & = & 9,\ 9999\ldots \\ -\,x & = & -\,0,\ 9999\ldots \\ \hline 9\,x & = & 9 \end{array}$$

Ce qui implique bien que $x = 1$.

C.Q.F.D.

Démontrons que $0,212999\ldots = 0,213000\ldots$**.**

Posons $y := 0,212999\ldots.$

$$\begin{array}{rcr} 10\,000\,y & = & 2129,9999\ldots \\ -\,1\,000\,y & = & -\;\; 212,9999\ldots \\ \hline 9000\,y & = & 1917 \end{array}$$

Alors on a

Ce qui implique que $y = \frac{1917}{9000}$.

Et on vérifie facilement que $\frac{1917}{9000} = 0,213$

C.Q.F.D.

Théorème I.29 $\mathbb{R}$ *est non dénombrable.*

Démonstration

Étape 1 : Nous allons démontrer que l'intervalle $]0,1]$ est non dénombrable.

Preuve par contradiction.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que

$$|\mathbb{N}| \geq |]0,1]|$$

et cherchons une contradiction.

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow]0,1]$, une application surjective.

$\langle$ Un tel f existe car $|\mathbb{N}| \geq |]0,1]|$. $\rangle$

Nous allons maintenant représenter f en extension, en représentant en base 10 chacun des $f(n)$.

Soient $(a_i^n)_{n,i\in\mathbb{N}}$, une famille de chiffres de 0 à 9, choisis tels que :

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 0,\ a_0^0\,a_1^0\,a_2^0\,a_3^0\,a_4^0\,a_5^0\ldots \\
f(1) & = & 0,\ a_0^1\,a_1^1\,a_2^1\,a_3^1\,a_4^1\,a_5^1\ldots \\
f(2) & = & 0,\ a_0^2\,a_1^2\,a_2^2\,a_3^2\,a_4^2\,a_5^2\ldots \\
f(3) & = & 0,\ a_0^3\,a_1^3\,a_2^3\,a_3^3\,a_4^3\,a_5^3\ldots \\
f(4) & = & 0,\ a_0^4\,a_1^4\,a_2^4\,a_3^4\,a_4^4\,a_5^4\ldots \\
\vdots & \vdots & \qquad\quad\vdots
\end{array}$$

Soit $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, une famille de chiffres choisis tel que pour chaque $i : \mathbb{N}$:

$$b_i = \begin{cases} 4 \text{ si } a_i^i \neq 4 \\ 5 \text{ si } a_i^i = 4 \end{cases}$$

Soit maintenant $b := 0,\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots$.

Clairement, b est un nombre de l'intervalle $]0, 1]$, représenté en base 10 par une famille de chiffres qui ne se termine pas par une séquence infinie de 9.

Soit $n : \mathbb{N}$ choisi tel que $f(n) = b$.

$\langle$ Un tel n existe car f est surjectif. $\rangle$

Alors on a que

$$0,\ b_0\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5 \ldots = 0,\ a_0^n\, a_1^n\, a_2^n\, a_3^n\, a_4^n\, a_5^n \ldots.$$

$\langle$ Car **notre** représentation base 10 est unique. (Voir le Rappel.) $\rangle$

En particulier on doit avoir que $b_n = a_n^n$, ce qui en **contradiction** avec la définition de $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Ainsi, on ne peut pas supposer que $]0,1]$ est dénombrable, c'est donc que $]0,1]$ n'est pas dénombrable.

Étape 2 : Nous allons maintenant démontrer que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Comme $]0,1] \subseteq \mathbb{R}$, on a donc que par la proposition I.14, que

$$I_{]0,1]\subseteq\mathbb{R}} :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une application injective.

Ce qui implique que $|\mathbb{R}| \geq |]0,1]|$.

Ce qui, combiné avec l'étape 1, implique que $|\mathbb{R}| \geq |]0,1]| > |\mathbb{N}|$.

$\mathbb{R}$ est donc non dénombrable.

C.Q.F.D.