3 “Avoir plus d’éléments”

Comment faire maintenant pour comparer des ensembles infinis dont les cardinalités ne sont pas égales ?

3.1 À la recherche d’une définition

Notre définition d’égalité des cardinalités pour les ensembles infinis n’est qu’une généralisation du cas fini.

Comment faire pour l’inégalité des cardinalités ?

Des suggestions ?

Théorème I.10 *Soient* A *et* B*, deux ensembles non vides. Alors,*

$\exists$ *application injective* $f : A \longrightarrow B$ *ssi* $\exists$ *application surjective* $g : B \longrightarrow A$*.*

Démonstration

$\Rightarrow$: Supposons qu'il existe une application injective de A vers B et démontrons qu'il existe une application surjective de B vers A.

Soit $f : A \longrightarrow B$, une application injective.

Soit $a_0 \in A$.

$\langle$ Un tel a_0 existe car A est un ensemble non vide par hypothèse. $\rangle$

Soit $g = \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\} \cup \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima.}f\}$

Montrons que g est une application surjective.

- $g \subseteq B \times A$ **est total.** C'est-à-dire

$$(\forall b : B \mid: (\exists a : A \mid: bga))$$

Soit $b : B$.

Alors, il y a deux cas à considérer :

Cas 1 : $b \in \mathrm{Ima}.f$.

Soit $a : A$ choisis tel que $f(a) = b$

$\langle$ Un tel a existe – définition de $\mathrm{Ima}.f$. $\rangle$

Alors on a bien que $\langle f(a), a \rangle \in g$

c'est-à-dire que $\langle b, a \rangle \in g$

Cas 2 : $b \notin \mathrm{Ima.}f$.

Soit $a = a_0$.

$\langle$ Bien sûr, un tel a existe et est dans A $\rangle$

Et on a bien que $\langle b, a_0 \rangle \in g$

$\langle$ Définition de g.$\rangle$

Donc g est total.

- $g \subseteq B \times A$ **est déterministe**. C'est-à-dire

$$(\forall b : B, a, a' : A \mid bga \wedge bga' : a = a')$$

Soient $b : B$ et a, $a' : A$ choisis tels que $bga \wedge bga'$.

Ici aussi, il y a deux cas à considérer :

Cas 1 : $b \in \mathrm{Ima}.f$. Alors, comme on a bga, on a donc $\langle b, a\rangle \in \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\}$.

Ce qui implique que $b = f(a)$.

D'autre part, comme on a bga',

on a donc $\langle b, a'\rangle \in \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\}$.

Ce qui implique que $b = f(a')$.

Par la transitivité de $=$, de $b = f(a)$ et $b = f(a')$, on obtient que $f(a) = f(a')$.

Ce qui implique que $a = a'$. ⟨ Car f est injectif.⟩

Cas 2 : $b \notin \mathrm{Ima}.f$.

Alors, comme on a bga,

on a donc $\langle b, a\rangle \in \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima}.f\}$.

et $\langle b, a'\rangle \in \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima}.f\}$.

Ce qui implique que $a = a_0$ et $a' = a_0$.

On a donc que $a = a'$.

$\langle$ Transitivité de $=$.$\rangle$

g est donc déterministe.

g est donc une application de B vers A.

- $g : B \longrightarrow A$ **est surjectif.** C'est-à-dire

$$(\forall a : A \mid : (\exists b : B \mid : bga))$$

Soit $a : A$.

Soit $b := f(a)$.

$\langle$ Un tel b existe et appartient à B, car f est total.$\rangle$

Et on a bien bga.

$\langle$ Définition de g dans le cas où $b \in \mathrm{Ima}.f$. $\rangle$

$\Leftarrow$: Supposons qu'il existe une application surjective de B vers A et démontrons qu'il existe une application injective de A vers B.

Soit $g : B \longrightarrow A$, une application surjective.

Nous avons donc que pour tout $a : A$, il existe un $b : B$ tel que $g(b) = a$.

$\langle$ Car g est surjectif. $\rangle$

Pour **chacun** des $a : A$, nous allons choisir un tel $b : B$ que nous noterons b_a.

Alors on a que pour tout $a : A$,

$(\star)$ $g(b_a) = a$ et que

$(\star\star)$ $b_a : B$.

Soit $f : A \longrightarrow B$ défini par la règle de correspondance $f(a) = b_a$.

Alors, clairement cette application est bien définie, car $(\star)$ et $(\star\star)$ impliquent que pour tout $a : A$, il existe un et un seul élément qui est en f-relation avec a, c'est b_a. Et ce b_a appartient bien à B, l'ensemble d'arrivée de f. La relation f est donc bien total et déterministe.

Il ne reste qu'à démontrer que f est injectif, c'est-à-dire que

$$(\forall a, a' : A \mid f(a) = f(a') : a = a')$$

Soient $a, a' : A$ choisis tel que $f(a) = f(a')$.

Alors on a que $b_a = b_{a'}$.

$\langle$ Définition de f. $\rangle$

Et donc que $g(b_a) = g(b_{a'})$.

$\langle$ Car g est une application. $\rangle$

Et donc que $a = a'$.

$\langle$ Voir $(\star)$. $\rangle$

f est bien une application injective.

C.Q.F.D.

Définition I.11 Soient A et B, deux ensembles.

On dit que A a *une cardinalité plus petite ou égale* à la cardinalité de B

ssi il existe une application injective de A vers B.

Ou, ce qui est équivalent,

ssi il existe une application surjective de B vers A.

On notera la phrase “A a une cardinalité plus petite ou égale à la cardinalité de B” par $|A| \leq |B|$.

3.2 Notre définition est-elle correcte ?

- **la réflexivité.** Est-ce qu'avec cette définition, un ensemble A a toujours une cardinalité plus petite ou égale à elle-même ?
  Autrement dit est que pour tout ensemble A, on a $|A| \leq |A|$?

- **l’antisymétrie.** Est-ce qu’avec cette définition, le fait qu’un ensemble A ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d’un ensemble B combiné avec le fait que B ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d’un ensemble A implique toujours que B a la même cardinalité que A ? Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, on a $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |B| = |A|$?

- **la transitivité.** Est-ce qu'avec cette définition, le fait qu'un ensemble A ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d'un ensemble B combiné au fait que ce B ait une cardinalité plus petite ou égale à celle d'un troisième ensemble C implique toujours que A a une cardinalité plus petite ou égale à celle de C ?

  Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, C, on a $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$?

- **cet ordre est-il compatible avec la relation "sous-ensemble".** Si un ensemble A est inclus dans un ensemble B, avons nous toujours que la cardinalité de A est plus petite ou égale à celle de B ?

  Autrement dit, est-ce que pour tout A, B,

  on a $(|A| \subseteq |B|) \Rightarrow (|A| \leq |B|)$?

- **cet ordre est-il partiel ou total.** Est-ce qu'avec cette définition, étant donné n'importe quel paire d'ensembles A et B, on a toujours ou bien que A a une cardinalité plus petite que celle de B, ou bien que A a une cardinalité plus grande que celle de B, ou bien que A a une cardinalité égale à celle de B ?

  Autrement dit,

  est-ce que pour tout A, B, on a $(|A| < |B|) \vee (|A| > |B|) \vee (|A| = |B|)$?

3.2.1 La réflexivité de notre relation “cardinalité $\leq$”

Cette propriété est clairement vérifiée puisque, comme on l’a vu à la section , pour tout ensemble A il existe toujours une application bijective de A vers A. Cette application étant par conséquent injective, nous avons bien que pour tout ensemble A, $|A| \leq |A|$.

3.2.2 L'antisymétrie de notre relation "cardinalité $\leq$"

Cette propriété découle du théorème suivant :

Théorème I.12 (Bernstein-Schröder) *Soient A et B, deux ensembles.*
S'il existe une application injective de A vers B et une application injective de B vers A, alors il existera une application bijective de A vers B.
Autrement dit : $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$.

Démonstration *Nous ne ferons pas cette démonstration dans le cadre de ce cours.*

3.2.3 La transitivité de notre relation "cardinalité $\leq$"

La transitivité est une conséquence du théorème suivant :

Théorème I.13 *Soient A, B et C, trois ensembles, et soient $f \subseteq A \times B$ et $g \subseteq B \times C$. Si f et g sont deux applications injectives, alors $f \circ g$ sera une application injective de A vers C.*

Démonstration Voir Lemmes C.4, C.5 et C.6.

3.2.4 La relation “cardinalité $\leq$”est-elle compatible avec $\subseteq$?

Le fait que pour toute paire d’ensembles A, B, on ait $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$, est une conséquence directe de la proposition suivante :

Proposition I.14 *Soient A et B deux ensembles. Si $A \subseteq B$ alors l’application* $I_{A\subseteq B} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a \end{array}$ *est bien définie et est injective.*

Démonstration Exercice.

3.2.5 Notre relation "cardinalité $\leq$" est-elle un ordre total ?

En fait on ne peut répondre à cette question puisqu'il a été démontré qu'à partir des axiomes que nous avons vus jusqu'à maintenant, il est tout à fait **impossible de démontrer que :**
pour tout paire d'ensembles A et B, on ait

$$(|A| < |B|) \vee (|A| > |B|) \vee (|A| = |B|).$$

Pour arriver à démontrer ce fait, il faut donc introduire un nouvel axiome, *l'axiome du choix* qui, en gros, dit que si vous avez une quantité infinie d'ensembles non vides devant vous et que vous souhaitez choisir un élément dans chacun de ces ensembles, vous pouvez supposer que vous savez le faire en une seule étape, même si dans les faits vous ne pourrez jamais faire cette opération puisqu'elle nécessite une infinité d'étapes.

Plus formellement :

axiome du choix I.15 Soit $(A_i)_{i\in I}$, une famille infinie d'ensembles non vides. Alors il existe une famille d'éléments $(a_i)_{i\in I}$ telle que pour chaque $i : I$, $a_i \in A_i$.

3.3 $|\mathbb{N}|$ est la plus petite cardinalité infinie

Théorème I.16 *Soit A un ensemble infini. Alors $|A| \geq |\mathbb{N}|$.*

Démonstration

Soit A un ensemble infini. Alors, nous devons démontrer que $|A| \geq |\mathbb{N}|$ et pour ce faire, nous allons montrer qu'il existe une application injective de $\mathbb{N}$ vers A.

Construisons l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ récursivement de la façon suivante :

Soit $a_0 \in A$.

$\langle$ Un tel a_0 existe car l'ensemble infini A est non vide. $\rangle$

Définissons $f(0) = a_0$.

Soit $a_1 \in A - \{a_0\}$.

$\langle$ Un tel a_1 existe car l'ensemble infini A contient plus d'un élément. $\rangle$

Définissons $f(1) = a_1$.

Soit $a_2 \in A - \{a_0, a_1\}$.

$\langle$ Un tel a_2 existe car l'ensemble infini A contient plus de deux éléments.

$\rangle$

Définissons $f(2) = a_2$.

Soit $a_3 \in A - \{a_0, a_1, a_2\}$.

$\langle$ Un tel a_3 existe car l'ensemble infini A contient plus de trois éléments.

$\rangle$

Définissons $f(3) = a_3$.

Continuant cette construction, ad infinitum, on aura défini $f(n)$, $\forall n : \mathbb{N}$.

Comme $\forall n : \mathbb{N}$, n est en relation f avec **un** et **un seul** élément de A (soit l'élément a_n),
f est bien une application de $\mathbb{N}$ vers A.

Il ne reste qu'à démontrer que f est injective. C'est-à-dire que

$$(\forall n, n' : \mathbb{N} \mid n \neq n' : f(n) \neq f(n'))$$

Soient n, n' : $\mathbb{N}$ choisis tels que $n \neq n'$. Et comme $\mathbb{N}$ est totalement ordonné, sans perte de généralité, supposons que $n < n'$.

Et de $n < n'$, on déduit que $a_n \in \{a_0, a_1, \ldots, a_{n'-1}\}$. Ce qui implique que $a_n \neq a_{n'}$.

$\langle$ Car par construction, $a_{n'} \in A - \{a_0, a_1, \ldots, a_{n'-1}\}$. $\rangle$

Comme en plus on a $a_n = f(n)$ et $a_{n'} = f(n')$.

$\langle$ Voir définition de f. $\rangle$

On a donc que $f(n) \neq f(n')$.

f est donc une application injective.

C.Q.F.D.

3.4 Donnons-nous des outils

Dans cette section, nous allons énoncer plusieurs résultats qui pourront être utiles lorsque viendra le temps de démontrer si deux ensembles ont la même cardinalité ou si un des deux a une cardinalité plus petite que l'autre.

Les deux premiers théorèmes sont des conséquences directes des définitions de “même cardinalité” et “cardinalité plus petite ou égale” et des théorèmes I.4, I.10 et I.12, de l’axiome du choix (Axiome I.15) et de la remarque de la section 3.2.5.

Théorème I.17 *Soient A et B, deux ensembles, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $|A| = |B|$.
2. $\exists$ application bijective $f : A \longrightarrow B$.
3. $\exists$ application bijective $g : B \longrightarrow A$.
4. $|A| \leq |B|$ et $|A| \geq |B|$.
5. $\exists$ application injective $f : A \longrightarrow B$
   et $\exists$ application injective $g : B \longrightarrow A$.
6. $\exists$ application injective $f : A \longrightarrow B$
   et $\exists$ application surjective $h : A \longrightarrow B$.
7. $\exists$ application surjective $k : B \longrightarrow A$
   et $\exists$ application surjective $h : A \longrightarrow B$.
8. $\exists$ application surjective $k : B \longrightarrow A$
   et $\exists$ application injective $g : B \longrightarrow A$.

Théorème I.18 *Soient* A *et* B*, deux ensembles, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $|A| < |B|$.

2. $|A| \leq |B| \quad$ et $\quad |A| \neq |B|$.

3. $\exists$ application injective $f : A \longrightarrow B$

   mais $\nexists$ application bijective $g : B \longrightarrow A$.

4. $|A| \leq |B| \quad$ et $\quad |A| \ngeq |B|$.

5. $\exists$ application injective $f : A \longrightarrow B$

   mais $\nexists$ application injective $g : B \longrightarrow A$.

6. $\exists$ application injective $f : A \longrightarrow B$

   mais $\nexists$ application surjective $g : A \longrightarrow B$.

7. $|A| \ngeq |B|$.

8. $\nexists$ application injective $g : B \longrightarrow A$.

9. $\nexists$ application surjective $g : A \longrightarrow B$.

Les deux théorèmes suivants portent sur la notion de dénombrabilité. Ils découlent essentiellement des théorèmes I.17 et I.18 et du fait que $|\mathbb{N}|$ est “la plus petite cardinalité infinie” (le théorème I.16).

Théorème I.19 *Soit A un ensemble. Alors les résultats suivants sont équivalents :*

1. *A est dénombrable.*
2. *$|A| \leq |\mathbb{N}|$*
3. *$\exists$ application surjective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*
4. *$\exists$ application injective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
5. *$|A| < |\mathbb{N}|$ ou $|A| = |\mathbb{N}|$*
6. *A est fini ou $\exists$ application bijective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
7. *A est fini ou $\exists$ application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*

Théorème I.20 *Soit A un ensemble. Alors les résultats suivants sont équivalents :*

1. *A est non dénombrable.*
2. *$|A| > |\mathbb{N}|$.*
3. *$\nexists$ application surjective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*
4. *$\nexists$ application injective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
5. *A est infini et $|A| \neq |\mathbb{N}|$.*
6. *A est infini et $\nexists$ application bijective $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.*
7. *A est infini et $\nexists$ application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*

Théorème I.21 *Soient A et B, deux ensembles dénombrables (finis ou infinis). Alors*

1. *$A \cup B$ est dénombrable,*
2. *$A \times B$ est dénombrable.*

Démonstration Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow B$, deux applications surjectives

$\langle$ De tels f et g existent, voir Théorème I.19. $\rangle$

Démontrons que $A \cup B$ est dénombrable.

$$\text{Soit } h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$$
$$n \longmapsto \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ est pair} \\ g(\frac{n-1}{2}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

L'application h est bien définie, car chaque $n : \mathbb{N}$ est en h-relation avec **un** et **un seul** élément de $A \cup B$ qui est **ou bien** $f(\frac{n}{2}) \in A$, si n est pair, **ou bien** $g(\frac{n-1}{2}) \in B$ si n est impair.

Donc, pour démontrer que $A \cup B$ est dénombrable, il suffit de montrer que h est surjectif.

$\langle$ Voir Théorème I.19.$\rangle$

Montrons donc que

$$(\forall y : A \cup B \mid : (\exists n : \mathbb{N} \mid : h(n) = y)).$$

Soit $y : A \cup B$.

Il y a deux cas (non nécessairement mutuellement exclusifs) à considérer.

Cas 1 : $y \in A$

Soit $i : \mathbb{N}$ choisi tel que $f(i) = y$.

$\langle$Un tel i existe car $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ est surjectif.$\rangle$

Soit $n := 2i$.

$\langle$Un tel n existe et appartient à $\mathbb{N}$.$\rangle$

Alors, on a bien

$$h(n) = h(2i) = f(\tfrac{2i}{2}) = f(i) = y.$$

Cas 2 : $y \in B$

Soit $j : \mathbb{N}$ choisi tel que $g(j) = y$.

$\langle$Un tel j existe car $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ est surjectif.$\rangle$

Soit $n := 2j + 1$.

$\langle$Un tel n existe et appartient à $\mathbb{N}$.$\rangle$

Alors, on a bien

$$h(n) = h(2j+1) = g(\frac{(2j+1)-1}{2}) = g(j) = y.$$

Dans chacun des deux cas on a bien qu'il existe un $n : \mathbb{N}$ tel que $h(n) = y$. h est donc une application surjective. $A \cup B$ est donc dénombrable.

Démontrons que $A \times B$ est dénombrable.

Nous avons démontré à la proposition I.8 que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Par le théorème I.19, il est donc suffisant de montrer que $|A \times B| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Pour démontrer la dénombrabilité de $A \times B$, il suffit donc de montrer qu'il existe une application surjective de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $A \times B$.

Soit l'application H suivante :

$$\begin{array}{rccc} H & : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & A \times B \\ & \langle i,j \rangle & \longmapsto & \langle f(i),g(j) \rangle \end{array}$$

On note que H est bien définie (c'est-à-dire, elle est bien une relation totale et déterministe), car pour tout couple $\langle i, j \rangle$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$H(\langle i, j \rangle) = \langle f(i), g(j) \rangle$$

est bien un élément de $A \times B$ puisque $f(i)$ est bien un élément de A et $g(j)$ est bien un élément de B.

Il existe donc pour chaque couple $\langle i, j \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, **un** et **un seul** élément de $A \times B$ qui est en H-relation avec $\langle i, j \rangle$.

H est bien une application.

Démontrons que H est surjectif.
Il faut démontrer que

$$(\forall \langle \alpha, \beta \rangle : A \times B \mid : (\exists \langle i, j \rangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid : H(\langle i, j \rangle) = \langle \alpha, \beta \rangle)) \, .$$

Soit $\langle \alpha, \beta \rangle$: $A \times B$.

Soit i: $\mathbb{N}$ choisi tel que $f(i) = \alpha$

$\langle$ Un tel i existe car f : $\mathbb{N} \longrightarrow A$ est une application surjective et $\alpha \in A$. $\rangle$

Soit j: $\mathbb{N}$ choisi tel que $g(j) = \beta$

$\langle$ Un tel j existe car g : $\mathbb{N} \longrightarrow B$ est une application surjective et $\beta \in B$. $\rangle$

Alors, on a bien que $\langle i, j \rangle$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et que $H(\langle i, j \rangle) = \langle \alpha, \beta \rangle$.

H est donc surjectif.

On a donc que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \geq |A \times B|$.

Par le théorème I.19–($2 \Rightarrow 1$), $A \times B$ est donc un ensemble dénombrable.

C.Q.F.D.