3 “Avoir plus d’éléments”

Comment faire maintenant pour comparer des ensembles infinis dont les cardinalités ne sont pas égales ?

3.1 À la recherche d’une définition

Notre définition d’égalité des cardinalités pour les ensembles infinis n’est qu’une généralisation du cas fini.

Comment faire pour l’inégalité des cardinalités ?

Des suggestions ?

Théorème I.10 *Soient A et B, deux ensembles non vides. Alors,*

$\exists$ application injective $f : A \longrightarrow B$ ssi $\exists$ application surjective $g : B \longrightarrow A$.

Démonstration

$\Rightarrow$: Supposons qu'il existe une application injective de A vers B et démontrons qu'il existe une application surjective de B vers A.

Soit $f : A \longrightarrow B$, une application injective.

Soit $a_0 \in A$.

$\langle$ Un tel a_0 existe car A est un ensemble non vide par hypothèse. $\rangle$

Soit $g = \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\} \cup \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima.} f\}$

Montrons que g est une application surjective.

- $g \subseteq B \times A$ **est total.** C'est-à-dire

$$(\forall b : B \mid: (\exists a : A \mid: bga))$$

Soit $b : B$.

Alors, il y a deux cas à considérer :

Cas 1 : $b \in \mathrm{Ima}.f$.

Soit $a : A$ choisis tel que $f(a) = b$

$\langle$ Un tel a existe – définition de $\mathrm{Ima}.f$. $\rangle$

Alors on a bien que $\langle f(a), a\rangle \in g$

c'est-à-dire que $\langle b, a\rangle \in g$

Cas 2 : $b \notin \mathrm{Ima}.f$.

Soit $a = a_0$.

$\langle$ Bien sûr, un tel a existe et est dans A $\rangle$

Et on a bien que $\langle b, a_0 \rangle \in g$

$\langle$ Définition de g.$\rangle$

Donc g est total.

- $g \subseteq B \times A$ **est déterministe**. C'est-à-dire

$$(\forall b : B, a, a' : A \mid bga \wedge bga' : a = a')$$

Soient $b : B$ et a, $a' : A$ choisis tels que $bga \wedge bga'$.

Ici aussi, il y a deux cas à considérer :

Cas 1 : $b \in \mathrm{Ima}.f$. Alors, comme on a bga, on a donc $\langle b, a\rangle \in \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\}$.
Ce qui implique que $b = f(a)$.
D'autre part, comme on a bga',
on a donc $\langle b, a'\rangle \in \{\langle f(a), a\rangle | a \in A\}$.
Ce qui implique que $b = f(a')$.

Par la transitivité de $=$, de $b = f(a)$ et $b = f(a')$, on obtient que $f(a) = f(a')$.
Ce qui implique que $a = a'$. ⟨ Car f est injectif.⟩

Cas 2 : $b \notin \mathrm{Ima}.f$.

Alors, comme on a bga,

on a donc $\langle b, a\rangle \in \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima}.f\}$.

et $\langle b, a'\rangle \in \{\langle b, a_0\rangle | b \notin \text{Ima}.f\}$.

Ce qui implique que $a = a_0$ et $a' = a_0$.

On a donc que $a = a'$.

$\langle$ Transitivité de $=$.$\rangle$

g est donc déterministe.

g est donc une application de B vers A.

- $g : B \longrightarrow A$ **est surjectif.** C'est-à-dire

$$(\forall a : A \mid : (\exists b : B \mid : bga))$$

Soit $a : A$.

Soit $b := f(a)$.

$\langle$ Un tel b existe et appartient à B, car f est total.$\rangle$

Et on a bien bga.

$\langle$ Définition de g dans le cas où $b \in \mathrm{Ima}.f$. $\rangle$

$\Leftarrow$: Supposons qu'il existe une application surjective de B vers A et démontrons qu'il existe une application injective de A vers B.

Soit $g : B \longrightarrow A$, une application surjective.

Nous avons donc que pour tout $a : A$, il existe un $b : B$ tel que $g(b) = a$.

$\langle$ Car g est surjectif. $\rangle$

Pour **chacun** des $a : A$, nous allons choisir un tel $b : B$ que nous noterons b_a.

Alors on a que pour tout $a : A$,

$(\star)$ $g(b_a) = a$ et que

$(\star\star)$ $b_a : B$.

Soit $f : A \longrightarrow B$ défini par la règle de correspondance $f(a) = b_a$.

Alors, clairement cette application est bien définie, car $(\star)$ et $(\star\star)$ impliquent que pour tout $a : A$, il existe un et un seul élément qui est en f-relation avec a, c'est b_a. Et ce b_a appartient bien à B, l'ensemble d'arrivée de f. La relation f est donc bien total et déterministe.

Il ne reste qu'à démontrer que f est injectif, c'est-à-dire que

$$(\forall a, a' : A \mid f(a) = f(a') : a = a')$$

Soient $a, a' : A$ choisis tel que $f(a) = f(a')$.

Alors on a que $b_a = b_{a'}$.

$\langle$ Définition de f. $\rangle$

Et donc que $g(b_a) = g(b_{a'})$.

$\langle$ Car g est une application. $\rangle$

Et donc que $a = a'$.

$\langle$ Voir $(\star)$. $\rangle$

f est bien une application injective.

C.Q.F.D.