MAT-22257

$\langle\langle$ *Chapitre sur les ensembles infinis* $\rangle\rangle$

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux ensembles de taille infinie.

– “Qu’est-ce qui est calculable en informatique ?”
– Étant donné un problème, pourrons-nous toujours décider si ce problème a une solution ou non ?
– À propos des systèmes qui interagissent avec le monde réel.

Les structures infinies sont en général beaucoup plus difficiles à étudier que les structures finies.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement au problème de la cardinalité des ensembles.

Nous savons déjà que calculer la cardinalité d'un ensemble **fini** revient à compter le nombre d'éléments que cet ensemble contient.

Il est évident que dans le cas des ensembles infinis, cette approche n'est pas envisageable.

Nous aurons donc des résultats du type :

- un ensemble A *a autant d'éléments* qu'un ensemble B

  ou encore

- un ensemble A *a moins d'éléments* qu'un ensemble B

Un hôtel a un nombre infini de chambres (pour chaque entier $i > 0$*, il y a une chambre portant le numéro i). L'hôtel est plein (il y a un voyageur dans chaque chambre). Arrive un nouveau voyageur qui voudrait bien dormir à l'hôtel lui aussi. Alors l'hôtelier lui dit qu'il va lui trouver une chambre. Il ne mettra à la porte aucun voyageur, il ne mettra pas deux voyageurs dans une même chambre et il ne fera pas construire une nouvelle chambre. Alors comment l'hôtelier fera-t-il ?*

Le fait qu'il y ait une solution à ce problème choque notre intuition.

2 “Avoir autant d’éléments”

2.1 À la recherche d’une définition

Nous sommes donc face à ce problème un peu comme un tout jeune enfant qui a dans une main des pierres blanches et dans l’autre des pierres noires, et qui se demande si, oui ou non, chaque main a autant de pierres...

Le problème survient avec une infinité de pierres...

Procédons autrement...

Théorème I.1 *Deux ensembles finis A et B ont le même nombre d'éléments si et seulement s'il existe une application bijective $f : A \longrightarrow B$.*

Définition I.2 Soient A et B, deux ensembles. On dit que A a *autant d'éléments* que B (ou ce qui est équivalent, que *la cardinalité de* A *est égale à la cardinalité de* B) ssi il existe une application bijective de A vers B.

Notation :

$$\begin{aligned} |A| &= |B| \\ \#A &= \#B \\ \mathrm{CARD}(A) &= \mathrm{CARD}(B) \end{aligned}$$

2.2 Notre définition est-elle correcte ?

À quoi devrait ressembler une bonne définition “d’égalité” entre des cardinalités ?

- **la réflexivité** Est-ce qu'avec cette définition, un ensemble A a toujours la même cardinalité que lui-même ?

  Autrement dit, est-ce que pour tout ensemble A, on a $|A| = |A|$?

- **la symétrie** Avec cette définition, le fait qu'un ensemble A ait la même cardinalité qu'un ensemble B implique-t-il toujours que B a la même cardinalité que A ?

  Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, on a $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$?

- **la transitivité** Est-ce qu'avec cette définition, le fait qu'un ensemble A ait la même cardinalité qu'un ensemble B combiné au fait que ce B ait la même cardinalité qu'un troisième ensemble C implique toujours que A a la même cardinalité que C ?

  Autrement dit, est-ce que pour tout A, B, C,

  on a $(|A| = |B|) \wedge (|B| = |C|) \Rightarrow (|A| = |C|)$?

2.2.1 La réflexivité de notre relation “autant d’éléments”

Pour démontrer la réflexivité, il faut démontrer que pour tout ensemble A, il existe une application bijective de A vers A.

La réflexivité est donc une conséquence de la proposition suivante :

Proposition I.3 *Soit A un ensemble, la relation $\boldsymbol{I}_A$ est une application bijective.*

Démonstration Rappelons-nous que

$$\mathbf{I}_A : A \longrightarrow A$$

est défini par la règle de correspondance $\mathbf{I}_A(x) = x$, $\forall x \in X$.

$\mathbf{I}_A$ est une application car c'est ce que signifie la notation $A \longrightarrow A$.

Démontrons l'injectivité, c.-à-d. :

$$(\forall x, x' : A | \; \mathbf{I}_A(x) = \mathbf{I}_A(x') : x = x')$$

Soient $x, x' : A$, choisis tels que $\mathbf{I}_A(x) = \mathbf{I}_A(x')$.

Alors on a immédiatement $x = x'$.

$\langle$ Car $\mathbf{I}_A(x) = x$ et $\mathbf{I}_A(x') = x'$. $\rangle$

$\mathbf{I}_A$ est bien une application injective.

Démontrons la surjectivité, c.-à-d. :

$$(\forall y : A| : (\exists x : A| : \mathbf{I}_A(x) = y))$$

Soit $y : A$.

Et soit $x := y$.

$\langle$ Un tel x existe et appartient bien à A, car l'ensemble de départ coïncide avec l'ensemble d'arrivée. $\rangle$

Alors on a bien $\mathbf{I}_A(x) = y$.

$\mathbf{I}_A$ est bien une application surjective.

$\mathbf{I}_A$ est bien une application bijective.

C.Q.F.D.

2.2.2 La symétrie de notre relation “autant d’éléments”

Pour montrer la symétrie, il faut montrer que pour toute paire d’ensembles A et B : s’il existe une application bijective de A vers B, alors il existe une application bijective de B vers A.

On y arrive à l'aide du théorème suivant.

Théorème I.4 *Soient* A *et* B*, deux ensembles, et* $f \subseteq A \times B$*. Alors la relation* f *est une application bijective ssi la relation inverse* $f^{-1} \subseteq B \times A$ *est une application bijective.*

Démonstration Rappelons que la relation inverse de la relation f est : $f^{-1} := \{\langle b, a\rangle |\ \langle a, b\rangle \in f\}$

Il faudrait donc montrer

$$\begin{cases} 1.- & f \text{ est total} \equiv f^{-1} \text{ est surjectif ;} \\ 2.- & f \text{ est déterministe} \equiv f^{-1} \text{ est injectif ;} \\ 3.- & f \text{ est injectif} \equiv f^{-1} \text{ est déterministe ;} \\ 4.- & f \text{ est surjectif} \equiv f^{-1} \text{ est total.} \end{cases}$$

Or, nous avons déjà fait cette démonstration. (Voir le théorème C.2 du fascicule *Théorie des relations : notes complémentaires et exemples de démonstrations de type "classique".*

C.Q.F.D.

2.2.3 La transitivité de notre relation “autant d’éléments”

Pour démontrer la transitivité, il faut démontrer que pour tout triplet d’ensembles A, B et C :

s’il existe une application bijective de A vers B et une application bijective de B vers C, alors il existe une application bijective de A vers C.

On y arrive à l’aide du théorème suivant.

Théorème I.5 *Soient* A*,* B *et* C*, trois ensembles, et soient* $f \subseteq A \times B$ *et* $g \subseteq B \times C$*. Si* f *et* g *sont deux applications bijectives, Alors* $f \circ g$ *sera une application bijective de* A *vers* C*.*

Démonstration Ce théorème est une conséquence directe de la définition d'application bijective et des lemmes C.4, C.5, C.6 et C.7 qui sont à la fin du fascicule "Théorie des relations : notes complémentaires et exemples de démonstrations de type classique".

C.Q.F.D.

2.3 "Autant" d'éléments que l'ensemble $\mathbb{N}$: les ensembles infinis dénombrables.

Parmi les ensembles infinis, une certaine classe est plus intéressante que les autres, c'est celle des ensembles *infinis dénombrables* :

Définition I.6 Un ensemble A est dit *dénombrable* s'il est fini ou de la même cardinalité que l'ensemble $\mathbb{N}$.

Faire une énumération...

Faire une liste...

- $f(0)$ étant le $0^{\text{ième}}$ élément de cet énumération.
- $f(1)$ étant le 1^{er} élément de cet énumération
- $f(2)$ étant le $2^{\text{ième}}$ élément de cet énumération
- etc.

Exemple I.7 Démontrons la dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, en construisant l'application bijective $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, qui est définie en extension par :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \cdots & f(8) & f(6) & f(4) & f(2) & f(0) & f(1) & f(3) & f(5) & f(7) & \cdots \end{array}$$

C.Q.F.D.

Les preuves de type classique... des preuves intuitives...

Proposition I.8 *L'ensemble* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration Pour montrer la dénombrabilité de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nous allons construire une application bijective $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, en la définissant en extension de la manière suivante :

$$
\begin{array}{cccccc}
\langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,2\rangle & \langle 0,3\rangle & \langle 0,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
k(0) & k(2) & k(5) & k(9) & k(14) & \\
\\
\langle 1,0\rangle & \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \langle 1,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
k(1) & k(4) & k(8) & k(13) & k(19) & \\
\\
\langle 2,0\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle & \langle 2,3\rangle & \langle 2,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
k(3) & k(7) & k(12) & k(18) & k(25) & \\
\\
\langle 3,0\rangle & \langle 3,1\rangle & \langle 3,2\rangle & \langle 3,3\rangle & \langle 3,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
k(6) & k(11) & k(17) & k(24) & k(32) & \\
\\
\langle 4,0\rangle & \langle 4,1\rangle & \langle 4,2\rangle & \langle 4,3\rangle & \langle 4,4\rangle & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots \\
k(10) & k(16) & k(23) & k(31) & k(40) & \\
\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

On a donc que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est donc un ensemble dénombrable.

C.Q.F.D.

Remarquons qu'étant donné que la relation “avoir autant d'éléments” est transitive (voir), si nous avons déjà démontré la dénombrabilité d'un ensemble A, nous pouvons alors démontrer la dénombrabilité d'un nouvel ensemble B en utilisant le lemme suivant :

Lemme I.9 *Étant donné un ensemble infini B. Alors,*

B *est dénombrable* $\equiv$

$(\exists A : ensemble \mid A$ *est infini dénombrable* $: |A| = |B|)$