Théorème C.2 *Soient* B *et* C*, deux ensembles, et* $\rho \subseteq B \times C$*. Alors*

$$\begin{cases} 1.- & \rho \textit{ est total} \equiv \rho^{-1} \textit{ est surjectif ;} \\ 2.- & \rho \textit{ est déterministe} \equiv \rho^{-1} \textit{ est injectif ;} \\ 3.- & \rho \textit{ est injectif} \equiv \rho^{-1} \textit{ est déterministe ;} \\ 4.- & \rho \textit{ est surjectif} \equiv \rho^{-1} \textit{ est total.} \end{cases}$$

Démonstration Soit $\rho \subseteq B \times C$.

1.- ρ est total $\equiv \rho^{-1}$ est surjectif.

ρ est total.

=⟨ définition de la totalité de ρ. ⟩

$(\forall b : B| : (\exists c : C| : b\rho c))$.

=⟨ définition de ρ^{-1}. ⟩

$(\forall b : B| : (\exists c : C| : c\rho^{-1}b))$.

=⟨ définition de la surjectivité de ρ^{-1}. ⟩

ρ^{-1} est surjectif.

2.- ρ est déterministe $\equiv \rho^{-1}$ est injectif.

ρ est déterministe.

$=\langle$ définition du déterminisme de ρ. $\rangle$

$$(\forall b : B, c, c' : C | b\rho c \wedge b\rho c' : c = c')).$$

$=\langle$ définition de ρ^{-1}. $\rangle$

$$(\forall b : B, c, c' : C | c\rho^{-1}b \wedge c'\rho^{-1}b : c = c')).$$

$=$

$$(\forall c, c' : C, b : B | c\rho^{-1}b \wedge c'\rho^{-1}b : c = c'))$$

$=\langle$ définition de l'injectivité de ρ^{-1}. $\rangle$

ρ^{-1} est injectif.

3.- ρ est injectif $\equiv \rho^{-1}$ est déterministe.

ρ est injectif.

$=\langle$ définition de la injectivité de ρ. $\rangle$

$$(\forall b, b' : B, c : C | b\rho c \wedge b'\rho c : b = b'))$$

$=\langle$ définition de ρ^{-1}. $\rangle$

$$(\forall b, b' : B, c : C | c\rho^{-1}b \wedge c\rho^{-1}b' : b = b')).$$

$=$

$$(\forall c : C, b, b' : B | c\rho^{-1}b \wedge c\rho^{-1}b' : b = b'))$$

$=\langle$ définition du déterminisme de ρ^{-1}. $\rangle$

ρ^{-1} est déterministe.

4.- ρ est surjectif $\equiv \rho^{-1}$ est total.

ρ est surjectif.

$=\langle$ définition de la surjectivité de ρ. $\rangle$

$$(\forall c : C| : (\exists b : B| : b\rho c)).$$

$=\langle$ définition de ρ^{-1}. $\rangle$

$$(\forall c : C| : (\exists b : B| : c\rho^{-1}b)).$$

$=\langle$ définition de la totalité de ρ^{-1}. $\rangle$

ρ^{-1} est total.

C.Q.F.D.

Définitions 1 : *Étant donnée une application* $f : B \longrightarrow C$, *alors*

$$f \text{ est injective } \equiv (\forall b, b' : B \mid f(b) = f(b') : b = b')$$

ce qui est équivalent à :

$$f \text{ est injective } \equiv (\forall b, b' : B \mid b \neq b' : f(b) \neq f(b'))$$

et, ce qui est équivalent à :

$$f \text{ est injective } \equiv (\forall b, b' : B, c : C \mid b f c \wedge b' f c : b = b')$$

Définitions 2 : *Étant donnée une application* $f : B \longrightarrow C$*, alors*

f *est surjective* $\equiv (\forall c : C| : (\exists b : B| : f(b) = c))$

ce qui est équivalent à :

$$f \text{ est surjective } \equiv (\forall c : C| : (\exists b : B| : b f c))$$

EXEMPLES de démonstrations de type “classique” appliqués à la théorie des relations :

(*Ici, les différentes propriétés reliées à l’arithmétique sont supposées connues et n’ont pas à être démontrées.*)

Étant données les deux relations suivantes :

a) $\tau \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, définie par : $\tau = \{i, j | j = 1/i : \langle i, j\rangle\}$

b) k : $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, définie par la règle : $h.x = 2x$

Pour chacune d'elle, déterminez s'il s'agit :

(1) d'une fonction (c.-à-d. : déterministe) ;

(2) d'une application (c.-à-d. : déterministe et totale) ;

(3) d'une application injective (c.-à-d. : déterministe, totale et injective) ;

(4) d'une application surjective (c.-à-d. : déterministe, totale et surjective) ;

a)(1) (*Intuitivement, τ semble être une relation déterministe.*)

Démontrons donc que
$(\forall b, c, c' | b\tau c \wedge b\tau c' : c = c')$

Soient b, c, c' choisis tels que $b\tau c$ et $b\tau c'$
$\langle$ *et montrons que* $c = c'$. $\rangle$

Comme $b\tau c$, alors par la définition de τ, on a $c = 1/b$.
Comme $b\tau c'$, alors par la définition de τ, on a $c' = 1/b$.

Donc, par la transitivité de $=$, on a $c = c'$.
τ est donc une relation déterministe.

C.Q.F.D.

a)(2) (*Intuitivement, τ semble ne pas être une relation totale, car la division par zéro n'est pas définie.*)

Nous devons donc démontrer que
$\neg(\forall b : \mathbb{Z}| : (\exists c : \mathbb{Z}| : b\tau c))$

Ce qui est équivalent à démontrer
$(\exists b : \mathbb{Z}| : \neg(\exists c : \mathbb{Z}| : b\tau c))$.
$\langle$ *Voir **(7.20)**, Axiome, De Morgan* $\rangle$

Ce qui est équivalent à démontrer
$(\exists b : \mathbb{Z}| : (\forall c : \mathbb{Z}| : \neg(b\tau c)))$.
$\langle$ *Voir **(7.21)(b)**, De Morgan* $\rangle$

Démontrons donc que
$(\exists b : \mathbb{Z}| : (\forall c : \mathbb{Z}| : \neg(b \tau c)))$.

Soit $b := 0$. ⟨ *Un tel* b *existe car clairement* $0 : \mathbb{Z}$*.* ⟩
Soit $c : \mathbb{Z}$

Alors, comme $1/0$ n'est pas de type $\mathbb{Z}$
⟨ *propriété de l'arithmétique* ⟩,
on ne peut pas avoir $c = 1/0$

Donc par la définition de τ, on ne peut avoir $b \tau c$,

On a donc $\neg(b \tau c)$. τ n'est donc pas une relation totale, et par conséquent n'est pas une application.

C.Q.F.D.

a)(3)et(4) ont tous deux des réponses négatives puisque τ n'est pas une application.

C.Q.F.D.

b)(1)et(2) k est nécessairement un application (à moins d'une erreur faite par le professeur dans l'énoncé) puisque c'est ce que signifie la notation

$$k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

k est donc une relation déterministe et totale.

C.Q.F.D.

b)(3) (*Intuitivement, k semble être une relation injective.*)

Comme k est une application nous allons démontrer :
$(\forall x, x' : \mathbb{Z} | k(x) = k(x') : x = x')$.

Soient $x, x : \mathbb{Z}$ choisis tels que $k(x) = k(x')$.

Alors on a $2x = 2x'$. $\langle$ *Définition de k.* $\rangle$

Alors on a $x = x'$. $\langle$ *Propriété de l'arithmétique.* $\rangle$

k est bien une application injective.

C.Q.F.D.

b)(4) (*Intuitivement, k semble ne pas être une relation surjective, les nombres impairs ne semblant pas faire partie de l'image de k.*)

Comme k est une application nous devons donc démontrer :
$\neg(\forall y : \mathbb{Z}| : (\exists x : \mathbb{Z}| : k(x) = y))$

Ce qui est équivalent à démontrer
$(\exists y : \mathbb{Z}| : \neg(\exists x : \mathbb{Z}| : k(x) = y))$.
$\langle$ *Voir **(7.20)**, Axiome, De Morgan* $\rangle$

Ce qui est équivalent à démontrer
$(\exists y : \mathbb{Z}| : (\forall x : \mathbb{Z}| : k(x) \neq y))$.
$\langle$ *Voir **(7.21)(b)**, De Morgan* $\rangle$

Démontrons donc
$(\exists y : \mathbb{Z}| : (\forall x : \mathbb{Z}| : k(x) \neq y))$.

Soit $y := 3$. *⟨ Un tel y existe car clairement $3 : \mathbb{Z}$. ⟩*
Soit $x : \mathbb{Z}$

Alors clairement, $k(x) = 2x \neq 3$, car 3 n'est pas un nombre pair.
⟨ Définition de la parité – propriété de l'arithmétique. ⟩

k n'est pas une application surjective.

C.Q.F.D.

Lemme C.3 *Soient $\rho \subseteq A \times B$ et $\sigma \subseteq B \times C$, deux relations déterministes. Alors $\rho \circ \sigma$ est une relation déterministe sur $A \times C$.*

Démonstration

En supposant	:	$(\star)$	$(\forall a : A,\ b, b' : B \mid a\rho b \wedge a\rho b' : b = b')$
et	:	$(\star\star)$	$(\forall b : B,\ c, c' : C \mid b\sigma c \wedge b\sigma c' : c = c')$
Nous allons démontrer	:		$(\forall a : A,\ c, c' : C \mid a\rho \circ \sigma c \wedge a\rho \circ \sigma c' : c = c')$

Soient $a : A$, $c : C$, $c' : C$ choisis tels que $a\rho \circ \sigma c$ et $a\rho \circ \sigma c'$
$\langle$*et montrons que $c = c'$.* $\rangle$

Soit $b : B$ choisi tel que $a\rho b \wedge b\sigma c$
$\langle$ Comme $a\rho \circ \sigma c$, par la définition de $\circ$, un tel b existe.$\rangle$

Soit $b' : B$ choisi tel que $a\rho b' \wedge b'\sigma c'$
$\langle$ Comme $a\rho \circ \sigma c'$, par la définition de $\circ$, un tel b' existe,

cependant il est a priori possible que b' soit différent de b.$\rangle$

Comme on a $a\rho b$ et $a\rho b'$, on a donc $b = b'$. $\langle$ Voir ($\star$).$\rangle$

Ce dernier fait, combiné avec $b'\sigma c'$, nous donne $b\sigma c'$.

Ainsi, on a à la fois $b\sigma c$ et $b\sigma c'$.

On a donc $c = c'$ $\langle$ Voir ($\star\star$).$\rangle$

$\rho \circ \sigma$ est donc une relation déterministe.

C.Q.F.D.

Lemme C.4 *Soient $\rho \subseteq A \times B$ et $\sigma \subseteq B \times C$, deux relations injectives. Alors $\rho \circ \sigma$ est une relation injective sur $A \times C$.*

Démonstration

En supposant	:	$(\diamondsuit)$	$(\forall a, a' : A,\ b : B \mid a\rho b \wedge a'\rho b : a = a')$
et	:	$(\diamondsuit\diamondsuit)$	$(\forall b, b' : B,\ c : C \mid b\sigma c \wedge b'\sigma c' : b = b')$
Nous allons démontrer	:		$(\forall a, a' : A,\ c : C \mid a\rho \circ \sigma c \wedge a'\rho \circ \sigma c : a = a$

Soient $a : A$, $a' : A$, $c : C$ choisis tels que $a\rho \circ \sigma c$ et $a'\rho \circ \sigma c$
$\langle$*et montrons que $a = a'$.* $\rangle$

Soit $b : B$ choisi tel que $a\rho b \wedge b\sigma c$
$\langle$ Comme $a\rho \circ \sigma c$, par la définition de $\circ$, un tel b existe.$\rangle$

Soit $b' : B$ choisi tel que $a'\rho b' \wedge b'\sigma c$
$\langle$ Comme $a'\rho \circ \sigma c$, par la définition de $\circ$, un tel b' existe,

cependant il est a priori possible que b' soit différent de b.$\rangle$

Comme on a $b\sigma c$ et $b'\sigma c$, on a donc $b = b'$. $\langle$ Voir ($\diamondsuit\diamondsuit$).$\rangle$

Ce dernier fait, combiné avec $a'\rho b'$, nous donne $a'\rho b$.

Ainsi, on a à la fois $a\rho b$ et $a'\rho b$.

On a donc $a = a'$ $\langle$ Voir ($\diamondsuit$).$\rangle$

$\rho \circ \sigma$ est donc une relation injective.

C.Q.F.D.

Lemme C.5 *Soient $\rho \subseteq A \times B$ et $\sigma \subseteq B \times C$, deux relations totales. Alors $\rho \circ \sigma$ est une relation totale sur $A \times C$.*

Démonstration

En supposant	:	$(\heartsuit)$	$(\forall a : A \mid: (\exists b : B \mid: a\rho b))$
et	:	$(\heartsuit\heartsuit)$	$(\forall b : B \mid: (\exists c : C \mid: b\sigma c))$
Nous allons démontrer	:		$(\forall a : A \mid: (\exists c : C \mid: a\, \rho \circ \sigma\, c))$

Soient $a : A$ $\langle$ *et montrons que* $(\exists c : C \mid: a\, \rho \circ \sigma\, c)$. $\rangle$

Soit $b : B$ choisi tel que $a\rho b$
$\langle$ par $\heartsuit$: un tel b appartenant à B existe bien.$\rangle$

Soit $c : C$ choisi tel que $b\sigma c$
$\langle$ par $\heartsuit\heartsuit$: un tel c appartenant à C existe bien.$\rangle$

Alors on a bien que $a\, \rho \circ \sigma\, c$
$\langle$ Par la définition de $\circ$, car $a\rho b$ et $b\sigma c$. $\rangle$

$\rho \circ \sigma$ est donc une relation totale.

C.Q.F.D.

Lemme C.6 *Soient $\rho \subseteq A \times B$ et $\sigma \subseteq B \times C$, deux relations surjectives. Alors $\rho \circ \sigma$ est une relation surjective sur $A \times C$.*

Démonstration

En supposant	:	(♠)	$(\forall b : B \mid: (\exists a : A \mid: a\rho b))$
et	:	(♠♠)	$(\forall c : C \mid: (\exists b : B \mid: b\sigma c))$
Nous allons démontrer	:		$(\forall c : C \mid: (\exists a : A \mid: a\,\rho \circ \sigma\, c))$

Soient $c : C$ ⟨*et montrons que* $(\exists a : A \mid: a\,\rho \circ \sigma\, c)$. ⟩

Soit $b : B$ choisi tel que $b\sigma c$
⟨ par ♠ : un tel b appartenant à B existe bien.⟩

Soit $a : A$ choisi tel que $a\rho b$
⟨ par ♠♠ : un tel a appartenant à A existe bien.⟩

Alors on a bien que $a\,\rho \circ \sigma\, c$
⟨ Par la définition de $\circ$, car $a\rho b$ et $b\sigma c$. ⟩

$\rho \circ \sigma$ est donc une relation surjective.

C.Q.F.D.