Chapitre 12

Relations et fonctions

12.1 n-uplets et produits cartésiens

12.2 Relations

12.3 Fonctions

12.4 Relations d'ordre

12.1 n-uplets et produits cartésiens

Un *n-uplet* est une *liste ordonnée* de n éléments $b_1, \ldots, b_n$, notée

$$\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle \ .$$

La liste est dite *ordonnée* parce que l'ordre des éléments est important (cela n'a rien à voir avec le fait que les éléments de la liste soient triés ou non). Par exemple, voici deux triplets différents :

$$\langle 4, 2, 3 \rangle \neq \langle 3, 2, 4 \rangle.$$

Un 2-uplet s'appelle une *paire ordonnée* ou un *couple ordonné* (on dit souvent simplement *paire* ou *couple*). Par exemple, $\langle 13, 4 \rangle$ est un couple.

La notation

$$(b_1, \ldots, b_n)$$

est aussi très fréquemment utilisée dans la littérature pour désigner un n-uplet.

(12.1) Axiome, égalité de couples : $\langle b, c\rangle = \langle b', c'\rangle \;\equiv\; b = b' \,\wedge\, c = c'$

Par exemple, $\langle 2, 3\rangle \neq \langle 3, 2\rangle$.

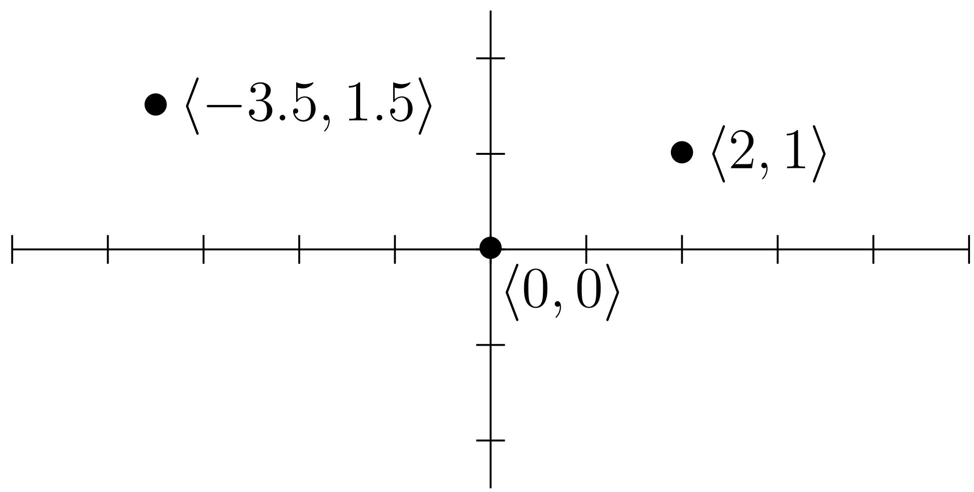
Produits cartésiens

(12.2) Axiome, produit cartésien : $S \times T \;=\; \{b, c \mid b \in S \wedge c \in T : \langle b, c\rangle\}$

(12.3) Exemple.

1. $\{3, 5\} \times \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\} \;=\; \{\langle 3, \mathsf{a}\rangle, \langle 3, \mathsf{b}\rangle, \langle 3, \mathsf{c}\rangle, \langle 5, \mathsf{a}\rangle, \langle 5, \mathsf{b}\rangle, \langle 5, \mathsf{c}\rangle\}$
   Notez que les lettres en police sans sérif (a,b,c) sont des constantes de type caractère et non des variables. En programmation, on écrirait 'a', 'b', 'c'.

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des points dans le plan



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, avec trois de ses couples

Théorèmes sur le produit cartésien

(12.4) Appartenance : $\langle x, y\rangle \in S \times T \;\equiv\; x \in S \wedge y \in T$

(12.5) $\langle x, y\rangle \in S \times T \;\equiv\; \langle y, x\rangle \in T \times S$

(12.6) $S = \emptyset \;\Rightarrow\; S \times T \;=\; T \times S \;=\; \emptyset$

(12.7) $S \times T \;=\; T \times S \;\equiv\; S = \emptyset \vee T = \emptyset \vee S = T$

(12.8) Distributivité de $\times$ sur $\cup$:

$$\begin{aligned} S \times (T \cup U) \;&=\; (S \times T) \cup (S \times U) \\ (S \cup T) \times U \;&=\; (S \times U) \cup (T \times U) \end{aligned}$$

(12.9) Distributivité de $\times$ sur $\cap$:

$$\begin{aligned} S \times (T \cap U) \;&=\; (S \times T) \cap (S \times U) \\ (S \cap T) \times U \;&=\; (S \times U) \cap (T \times U) \end{aligned}$$

(12.10) Distributivité de $\times$ sur $-$:

$$S \times (T - U) \;=\; (S \times T) - (S \times U)$$

Théorèmes sur le produit cartésien (suite)

(12.11) **Monotonie :** $T \subseteq U \;\Rightarrow\; S \times T \subseteq S \times U$

(12.12) $S \subseteq U \wedge T \subseteq V \;\Rightarrow\; S \times T \subseteq U \times V$

(12.13) $S \times T \subseteq S \times U \wedge S \neq \emptyset \;\Rightarrow\; T \subseteq U$

(12.14) $(S \cap T) \times (U \cap V) \;=\; (S \times U) \cap (T \times V)$

(12.15) Si S et T sont des ensembles finis, $\#(S \times T) \;=\; \#S \cdot \#T$

Produit cartésien de n ensembles

$$S_1 \times \ldots \times S_n \;=\; \{s_1, \ldots, s_n \mid s_1 \in S_1 \wedge \ldots \wedge s_n \in S_n : \langle s_1, \ldots, s_n \rangle\}$$

Par exemple, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des points dans l'espace 3-D.

Notation $f{:}A \times B \to C$

Cette notation pour les fonctions utilise le produit cartésien. Elle indique que la fonction f s'applique à un couple, autrement dit, qu'elle a deux arguments (de types A et B).

12.2 Relations

Un ensemble R tel que

$$R \subseteq B_1 \times \ldots \times B_n$$

est appelé une *relation n-aire sur $B_1 \times \ldots \times B_n$*. Si $n = 2$, la relation est dite *binaire*. Si $n = 1$, la relation est dite *unaire*. Une relation n-aire contient donc des n-uplets. Une relation $R \subseteq B \times B$ est dite

sur B, plutôt que *sur $B \times B$*.

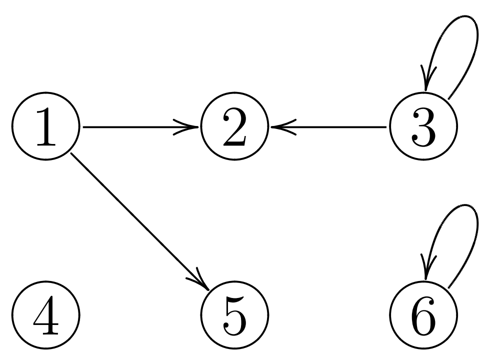
Cette terminologie courante est malheureusement ambigüe.

(12.16) Remarque. Dans les sections 12.2, 12.3 et 12.4, le terme *relation* désigne une *relation binaire*.

Exemples de relations binaires

1. La *relation vide* sur $B \times C$ est l'ensemble vide $\emptyset$.
2. La *relation identité* sur B est $\mathbf{I}_B = \{x \mid x \in B : \langle x, x \rangle\}$.
3. La relation parent_de sur l'ensemble des personnes relie les parents à leurs enfants. Par exemple, Paul parent_de Marie indique que Paul est un parent de Marie.
4. $\{b, c \mid b$ est l'origine d'un arc et c est la destination d'un arc $: \langle b, c \rangle\}$ est une relation sur l'ensemble des sommets d'un graphe. Par exemple,

$$\{\ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 6, 6 \rangle\ \}$$



5. $\{b, c \mid P$ débute l'exécution dans l'état b et la termine dans l'état $c : \langle b, c \rangle\}$ est une relation qui décrit l'action d'un programme P.

Notations pour l'appartenance à une relation

Il y a deux notations utiles que nous utiliserons pour désigner le fait qu'un couple $\langle b, c\rangle$ est un élément d'une relation ρ.

Relation	Couple	Notation 1	Notation 2
ρ	$\langle b, c\rangle$	$\langle b, c\rangle \in \rho$	$b\ \rho\ c$
$\mathsf{Parent\_de}$	$\langle \mathsf{Paul}, \mathsf{Marie}\rangle$	$\langle \mathsf{Paul}, \mathsf{Marie}\rangle \in \mathsf{Parent\_de}$	$\mathsf{Paul}\ \mathsf{Parent\_de}\ \mathsf{Marie}$
$<$	$\langle 2, 5\rangle$	$\langle 2, 5\rangle \in <$	$2 < 5$

De même que

$$3 < 5 < 4 \text{ signifie } 3 < 5 \wedge 5 < 4,$$

$$b\ \rho\ c\ \rho\ d \text{ signifie } b\ \rho\ c\ \wedge\ c\ \rho\ d.$$

La priorité de ρ dans l'expression $b\ \rho\ c$ est la même que celle de $<$. Voyez l'entrée (j) de la table de préséance des opérateurs. Par exemple,

$$b\ \rho\ c\ \wedge\ c\ \sigma\ d\ \equiv\ (b\ \rho\ c)\ \wedge\ (c\ \sigma\ d)\ .$$

Domaine et image d'une relation

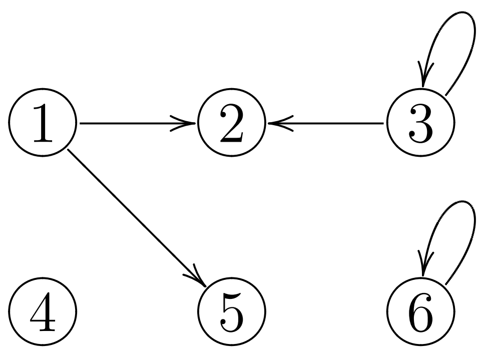
Le *domaine* $\mathsf{Dom}.\rho$ et l'*image* $\mathsf{Im}.\rho$ d'une relation sont définis comme suit :

(12.17) $\mathsf{Dom}.\rho \ = \ \{b \mid (\exists c \mid: b \ \rho \ c)\}$

(12.18) $\mathsf{Im}.\rho \ = \ \{c \mid (\exists b \mid: b \ \rho \ c)\}$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathsf{Dom}.\{\ \langle 1,2\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 6,6\rangle\ \} &= \{1,3,6\} \\ \mathsf{Im}.\{\ \langle 1,2\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 6,6\rangle\ \} &= \{2,3,5,6\} \end{aligned}$$



Le domaine est l'ensemble des éléments qui apparaissent comme première composante d'un couple. L'image est l'ensemble des éléments qui apparaissent comme deuxième composante d'un couple.

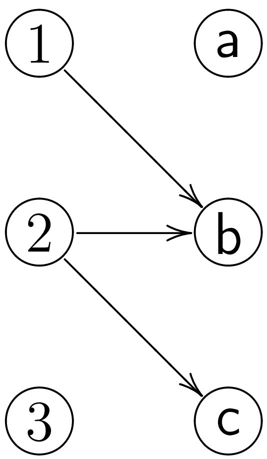
Opérations sur les relations

(12.19) Soient $\rho \subseteq B \times C$ et $\sigma \subseteq B \times C$.

Union	$\rho \cup \sigma$	comme pour d'autres ensembles
Intersection	$\rho \cap \sigma$	comme pour d'autres ensembles
Complément	$\sim\rho \; = \; (B \times C) - \rho$	$B \times C$ est l'ensemble universel
Inverse	$\langle b, c\rangle \in \rho^{-1} \equiv \langle c, b\rangle \in \rho$	pour tous $b{:}B$, $c{:}C$

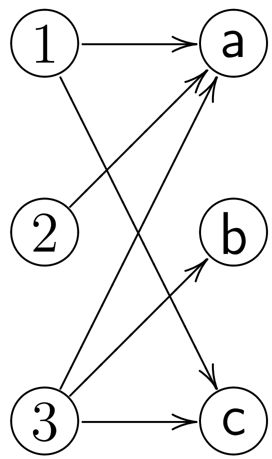
(12.20) Exemple. Supposons $B = \{1, 2, 3\}$ et $C = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$.

ρ



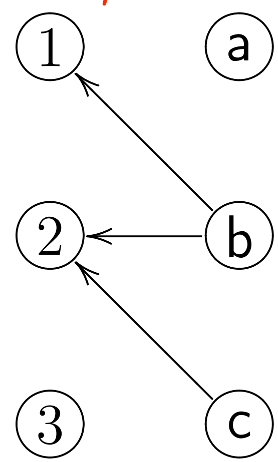
$\{\langle 1, \mathsf{b}\rangle, \langle 2, \mathsf{b}\rangle, \langle 2, \mathsf{c}\rangle\}$

$\sim\rho$



$\{\langle 1, \mathsf{a}\rangle, \langle 1, \mathsf{c}\rangle, \langle 2, \mathsf{a}\rangle$
$\langle 3, \mathsf{a}\rangle, \langle 3, \mathsf{b}\rangle, \langle 3, \mathsf{c}\rangle\}$

ρ^{-1}



$\{\langle \mathsf{b}, 1\rangle, \langle \mathsf{b}, 2\rangle, \langle \mathsf{c}, 2\rangle\}$

(12.21) Cas particulier de (11.9) : Soit ρ une relation.

$$\rho = \{b, c \mid \langle b, c\rangle \in \rho : \langle b, c\rangle\}$$

(12.22) Cas particulier de (11.6) :

$$\begin{array}{l} \langle b, c\rangle \in \{x, y \mid R : \langle x, y\rangle\} \;\equiv\; R[x, y \;:=\; b, c] \\ \langle b, c\rangle \in \{b, c \mid R : \langle b, c\rangle\} \;\equiv\; R \end{array}$$

(12.23) Théorème : Soient ρ et σ deux relations.

(a) $\mathsf{Dom}(\rho^{-1}) \;=\; \mathsf{Im}.\rho$

(b) $\mathsf{Im}(\rho^{-1}) \;=\; \mathsf{Dom}.\rho$

(c) $\rho \subseteq B \times C \;\equiv\; \rho^{-1} \subseteq C \times B$

(d) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

(e) $\rho \subseteq \sigma \;\equiv\; \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$

(f) $\mathbf{I}_B^{-1} \;=\; \mathbf{I}_B$

Produit de relations

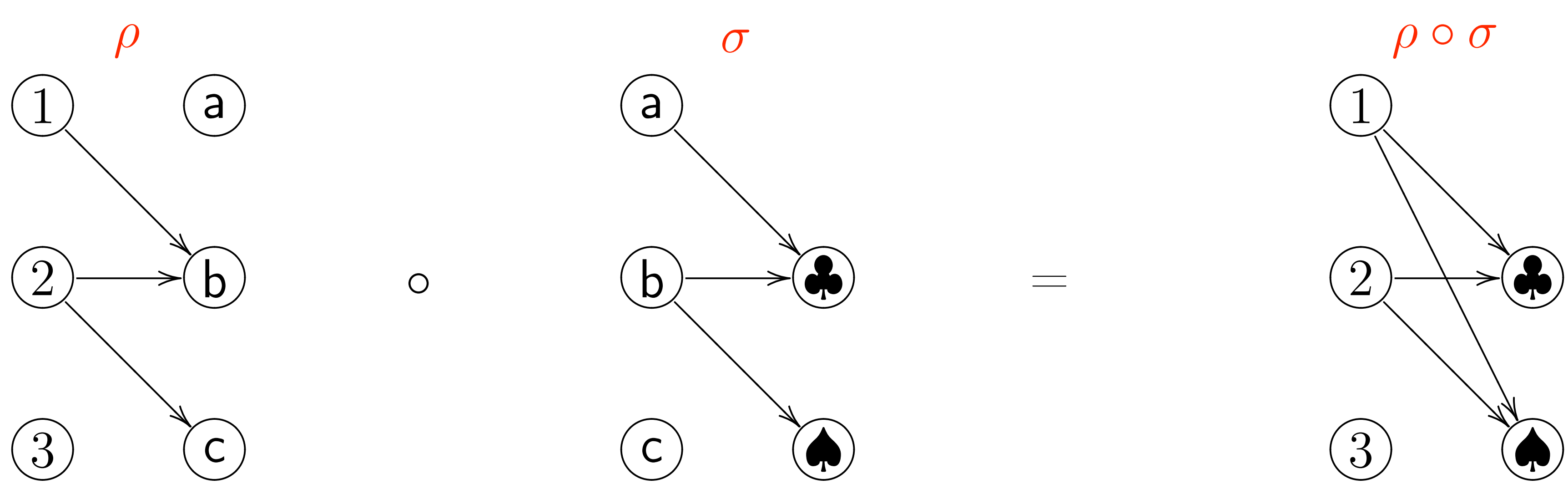
Soient les relations $\rho \subseteq B \times C$ et $\sigma \subseteq C \times D$. Le *produit* (aussi dit *produit relatif* ou *composition*) des relations ρ et σ, noté $\rho \circ \sigma$, est défini comme suit :

(12.24) Définition de $\circ$: $\langle b, d\rangle \in \rho \circ \sigma \;\equiv\; (\exists c{:}C \mid : \langle b, c\rangle \in \rho \wedge \langle c, d\rangle \in \sigma)$

ou encore, en utilisant la notation alternative et en laissant tomber le type de c,

(12.25) Définition de $\circ$: $b \;\rho\circ\sigma\; d \;\equiv\; (\exists c \mid : b \;\rho\; c \;\sigma\; d)$

(12.26) Exemple. Supposons $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ et $D = \{\spadesuit, \clubsuit\}$.



$\{\langle 1, \mathsf{b}\rangle, \langle 2, \mathsf{b}\rangle, \langle 2, \mathsf{c}\rangle\} \quad\circ\quad \{\langle \mathsf{a}, \clubsuit\rangle, \langle \mathsf{b}, \clubsuit\rangle, \langle \mathsf{b}, \spadesuit\rangle\} \quad=\quad \{\langle 1, \clubsuit\rangle, \langle 1, \spadesuit\rangle, \langle 2, \clubsuit\rangle, \langle 2, \spadesuit\rangle$

(12.27) Associativité de $\circ$: $\rho \circ (\sigma \circ \theta) \;=\; (\rho \circ \sigma) \circ \theta$

(12.28) Distributivité de $\circ$ sur $\cup$:
$$\begin{aligned} \rho \circ (\sigma \cup \theta) &= \rho \circ \sigma \,\cup\, \rho \circ \theta \\ (\sigma \cup \theta) \circ \rho &= \sigma \circ \rho \,\cup\, \theta \circ \rho \end{aligned}$$

(12.29) (Sous)-distributivité de $\circ$ sur $\cap$:
$$\begin{aligned} \rho \circ (\sigma \cap \theta) &\subseteq \rho \circ \sigma \,\cap\, \rho \circ \theta \\ (\sigma \cap \theta) \circ \rho &\subseteq \sigma \circ \rho \,\cap\, \theta \circ \rho \end{aligned}$$

Démonstration de (12.27) ci-contre : par extensionnalité (11.8) et par le métathéorème (7.33), il suffit de montrer $\langle a, d\rangle \in \rho \circ (\sigma \circ \theta) \;\equiv\; \langle a, d\rangle \in (\rho \circ \sigma) \circ \theta$.

$$\begin{aligned}
& a \;\rho \circ (\sigma \circ \theta)\; d \\
=\quad & \langle \text{ Définition (12.25) de } \circ \rangle \\
& (\exists b \mid: a \;\rho\; b \;\wedge\; b \;\sigma \circ \theta\; d) \\
=\quad & \langle \text{ Définition (12.25) de } \circ \rangle \\
& (\exists b \mid: a \;\rho\; b \;\wedge\; (\exists c \mid: b \;\sigma\; c \;\wedge\; c \;\theta\; d)) \\
=\quad & \langle\, \neg\mathsf{libre}(\text{‘}c\text{’},\text{‘}a \;\rho\; b\text{’}) \;\;\&\;\; \text{Distributivité de } \wedge \text{ sur } \exists \text{ (7.4)} \,\rangle \\
& (\exists b \mid: (\exists c \mid: a \;\rho\; b \;\wedge\; b \;\sigma\; c \;\wedge\; c \;\theta\; d)) \\
=\quad & \langle\, \neg\mathsf{libre}(\text{‘}c\text{’},\text{‘}\mathsf{vrai}\text{’}) \;\;\&\;\; \text{Imbrication (6.34)} \,\rangle \\
& (\exists b, c \mid: a \;\rho\; b \;\wedge\; b \;\sigma\; c \;\wedge\; c \;\theta\; d) \\
=\quad & \langle \text{ Le reste de la preuve est semblable à ce qui précède, mais dans l'ordre inverse ; complétez-la } \rangle \\
& a \;(\rho \circ \sigma) \circ \theta\; d
\end{aligned}$$

Autres lois sur les relations

(12.30) **Identité de $\circ$ (où $\rho \subseteq B \times C$) :** $\mathbf{I}_B \circ \rho \;=\; \rho \circ \mathbf{I}_C \;=\; \rho$

(12.31) $\langle x, y \rangle \in \mathbf{I}_B \;\equiv\; x = y$

(12.32) **Zéro de $\circ$:** $\emptyset \circ \rho \;=\; \rho \circ \emptyset \;=\; \emptyset$

(12.33) **Monotonie de $\circ$:** $\rho \subseteq \sigma \;\Rightarrow\; \rho \circ \theta \;\subseteq\; \sigma \circ \theta$

(12.34) **Monotonie de $\circ$:** $\rho \subseteq \sigma \;\Rightarrow\; \theta \circ \rho \;\subseteq\; \theta \circ \sigma$

(12.35) $(\rho \circ \sigma)^{-1} \;=\; \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

(12.36) $\emptyset^{-1} = \emptyset$

(12.37) $(\rho \cup \sigma)^{-1} \;=\; \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$

(12.38) $(\rho \cap \sigma)^{-1} \;=\; \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$

Puissances d'une relation

Définition inductive des puissances d'une relation ρ sur l'ensemble B.

(12.39) $\rho^0 = \mathbf{I}_B$ (relation identité sur B)

$\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$ (si $n \geq 0$)

Ainsi,

$$\rho^1 = \rho$$
$$\rho^2 = \rho \circ \rho$$
$$\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho$$

(12.40) Exemple.

1. $\mathsf{parent\_de}^2 = \mathsf{parent\_de} \circ \mathsf{parent\_de} = \mathsf{grand\text{-}parent\_de}$
2. Posons $\mathsf{succ\_de} = \{b{:}\mathbb{Z} \mid: \langle b+1, b\rangle\}$. Par exemple, $5\ \mathsf{succ\_de}\ 4$.

   On peut montrer

   (a) $\mathsf{succ\_de}^2 = \{b{:}\mathbb{Z} \mid: \langle b+2, b\rangle\}$

   (b) $\mathsf{succ\_de}^n = \{b{:}\mathbb{Z} \mid: \langle b+n, b\rangle\}$ (par induction, bien sûr)

(12.41) $\rho^m \circ \rho^n = \rho^{m+n}$

(12.42) $(\rho^m)^n = \rho^{m \cdot n}$

Classes de relations (propriétés des relations)

TAB. 12.1 – Classes de relations ρ sur un ensemble B

	Propriété	Définition 1	Définition 2
(a)	réflexivité	$(\forall b \mid: b\ \rho\ b)$	$\mathbf{I}_B \subseteq \rho$
(b)	irréflexivité	$(\forall b \mid: \neg(b\ \rho\ b))$	$\mathbf{I}_B \cap \rho = \emptyset$
(c)	symétrie	$(\forall b, c \mid: b\ \rho\ c \ \equiv\ c\ \rho\ b)$	$\rho^{-1} = \rho$
(d)	antisymétrie	$(\forall b, c \mid: b\ \rho\ c \wedge c\ \rho\ b \ \Rightarrow\ b = c)$	$\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathbf{I}_B$
(e)	asymétrie	$(\forall b, c \mid: b\ \rho\ c \Rightarrow \neg(c\ \rho\ b))$	$\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$
(f)	transitivité	$(\forall b, c, d \mid: b\ \rho\ c \wedge c\ \rho\ d \ \Rightarrow\ b\ \rho\ d)$	$\rho = (\cup i \mid i > 0 : \rho^i)$
			$\rho^2 \subseteq \rho$

Exemples.

Propriété	$=$	$<$	$\leq$	$\subset$	$\subseteq$	$\Rightarrow$
réflexivité	$\times$		$\times$		$\times$	$\times$
irréflexivité		$\times$		$\times$		
symétrie	$\times$					

Propriété	$=$	$<$	$\leq$	$\subset$	$\subseteq$	$\Rightarrow$
antisymétrie	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
asymétrie		$\times$		$\times$		
transitivité	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Fermeture transitive et fermeture transitive réflexive

(12.43) Définition.

– La *fermeture transitive* de ρ, notée ρ^+, est la plus petite relation transitive qui contient ρ.
– La *fermeture transitive réflexive* de ρ, notée ρ^*, est la plus petite relation transitive et réflexive qui contient ρ.

(12.44) Remarque. Quand on dit que la relation ρ est *plus petite* que la relation σ, cela signifie $\rho \subseteq \sigma$. On dit aussi que σ *contient* ρ.

(12.45) Théorème : Soit ρ une relation sur un ensemble B.

$$\text{(a)}\quad \rho^+ \;=\; (\cup i \mid 0 < i : \rho^i)$$

$$\text{(b)}\quad \rho^* \;=\; \rho^+ \cup \mathbf{I}_B \;=\; (\cup i \mid 0 \leq i : \rho^i)$$

Pour démontrer (12.45a), il faut montrer que

1. $(\cup i \mid 0 < i : \rho^i)$ contient ρ, ce qui est évident,
2. $(\cup i \mid 0 < i : \rho^i)$ est transitive, ce qui est partiellement démontré ci-dessous,
3. toute autre relation transitive qui contient ρ et qui est transitive contient aussi $(\cup i \mid 0 < i : \rho^i)$. Cette preuve ne sera pas donnée.

(12.45b) se démontre de manière similaire.

Exemples de fermetures transitives

1. Rappelons que $\mathsf{succ\_de} = \{b{:}\mathbb{Z} \mid: \langle b+1, b\rangle\}$.
   $a\ \mathsf{succ\_de}^+\ b \ \equiv\ a > b$
   $a\ \mathsf{succ\_de}^*\ b \ \equiv\ a \geq b$

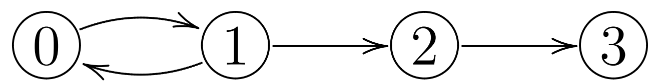
2. $a\ \mathsf{parent\_de}^+\ b \ \equiv\ a$ est un ancêtre de b
   $a\ \mathsf{parent\_de}^*\ b \ \equiv\ a$ est un ancêtre de b ou $a = b$

3. Soit $\rho = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ une relation sur l'ensemble $\{0,1,2,3\}$.

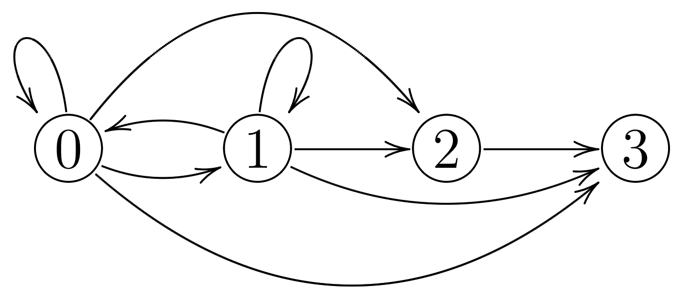
$\rho^+ = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$\rho^* = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

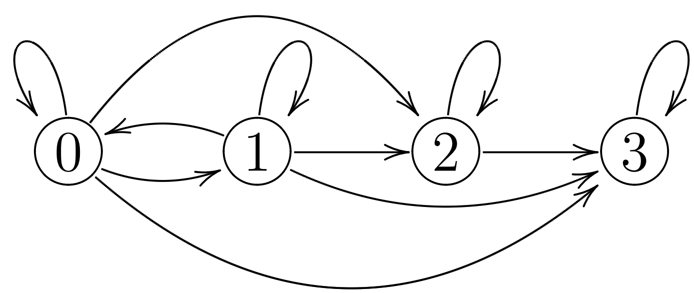
ρ



ρ^+



ρ^*



Relations d'équivalence

(12.46) Définition. Une *relation d'équivalence* est une relation qui est réflexive, symétrique et transitive.

(12.47) Définition. Soit ρ une relation d'équivalence sur un ensemble B, et soit $b \in B$. La *classe d'équivalence de b par la relation ρ*, notée $[b]_\rho$, est le sous-ensemble des éléments de B qui sont équivalents par la relation ρ :

$$x \in [b]_\rho \;\equiv\; x \,\rho\, b \ .$$

Si le contexte rend la relation ρ évidente, on écrit simplement $[b]$.

(12.48) Exemple.

1. L'égalité sur $\mathbb{Z}$ (ou sur tout autre ensemble) est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de n, c'est-à-dire $[n]_=$, contient n comme seul élément ; autrement dit, $[n]_= = \{n\}$.

2. La relation S sur l'ensemble des personnes définie par

$$a\ S\ b \;\equiv\; a \text{ et } b \text{ ont le même sexe}$$

est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence $[\mathsf{Marie}]_S$ et $[\mathsf{Paul}]_S$ contiennent respectivement l'ensemble des femmes et l'ensemble des hommes. On a

$$[\mathsf{Marie}]_S = [\mathsf{\grave{E}ve}]_S = \ldots$$

et

$$[\mathsf{Paul}]_S = [\mathsf{Adam}]_S = \ldots$$

3. Les relations $<$ et $\leq$ sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{R}$ ne sont pas des relations d'équivalence, car elles ne sont pas symétriques.

4. La relation $\stackrel{3}{=}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$b \stackrel{3}{=} c \;\equiv\; b - c \;\text{ est divisible par } 3\;,$$

ou encore, de manière équivalente, par

$$b \text{ et } c \text{ ont le même reste par la division par } 3\;,$$

est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont

$$\begin{array}{l} [0] = [3] = [6] = \ldots = \{0, 3, 6, \ldots\} \\ [1] = [4] = [7] = \ldots = \{1, 4, 7, \ldots\} \\ [2] = [5] = [8] = \ldots = \{2, 5, 8, \ldots\} \end{array}$$

Notez que chaque relation d'équivalence sur un ensemble B induit une partition de B (voyez (11.84) pour la définition d'une partition). En effet, tout élément de B est dans une et une seule classe d'équivalence.

Autres propriétés des relations $\rho \subseteq B \times C$

	Propriété	Définition 1	Définition 2
(a)	totalité	$(\forall b{:}B \mid{:} (\exists c{:}C \mid{:} b\ \rho\ c))$	$\mathsf{Dom}.\rho = B$
(b)	surjectivité	$(\forall c{:}C \mid{:} (\exists b{:}B \mid{:} b\ \rho\ c))$	$\mathsf{Im}.\rho = C$
(c)	déterminisme	$(\forall b, c, c' \mid b\ \rho\ c\ \wedge\ b\ \rho\ c' : c = c')$	$\rho^{-1} \circ \rho\ \subseteq\ \mathbf{I}_C$
(d)	injectivité	$(\forall b, b', c \mid b\ \rho\ c\ \wedge\ b'\ \rho\ c : b = b')$	$\rho \circ \rho^{-1}\ \subseteq\ \mathbf{I}_B$

Exemples. Soient les relations $\rho, \sigma, \tau, \theta$ données ci-dessous. Supposons que $=$, $<$, $\leq$, ρ, σ sont des relations sur $\mathbb{N}$, que $\subset, \subseteq$ sont des relations sur $\mathcal{P}\mathbb{N}$ et que $\Rightarrow$ est une relation sur $\{\mathsf{faux}, \mathsf{vrai}\}$.

$$\rho = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\} \qquad \sigma = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

$$\tau = \{a, b{:}\mathbb{Z} \mid a + 1 = b : \langle a, b\rangle\} \qquad \theta = \{a, b{:}\mathbb{Z} \mid a = b^2 : \langle a, b\rangle\}$$

Propriété	$=$	$<$	$\leq$	$\subset$	$\subseteq$	$\Rightarrow$	ρ	σ	τ	θ
totalité	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$			$\times$	
surjectivité	$\times$		$\times$		$\times$	$\times$			$\times$	$\times$
déterminisme	$\times$						$\times$		$\times$	
injectivité	$\times$								$\times$	$\times$

Définition de relations par compréhension : notation usuelle

$$\{x \mid R\}$$

est une abréviation de

$$\{x \mid R : x\} \ .$$

De même,

$$\{\langle b, c\rangle \mid R\} \ ;$$

est une abréviation de

$$\{b, c \mid R : \langle b, c\rangle\} \ ,$$

où b et c sont des variables (et pas des expressions arbitraires).

(12.49) Exemple.

$$\{\langle a{:}\mathbb{Z}, b{:}\mathbb{Z}\rangle \mid a+1=b\} \ = \ \{a{:}\mathbb{Z}, b{:}\mathbb{Z} \mid a+1=b : \langle a, b\rangle\} \ .$$

12.3 Fonctions

Les fonctions sont des relations avec une propriété particulière.

(12.50) Définition. Une relation binaire $f \subseteq B \times C$ est une *fonction* ssi f est déterministe, c'est-à-dire, rappelons-le, ssi

$$(\forall b, c, c' \mid b \ f \ c \ \wedge \ b \ f \ c' : c = c') \ .$$

Par exemple,

1. $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ est une fonction.
2. $g = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ n'est pas une fonction, car $1 \ g \ 2 \wedge 1 \ g \ 3$, mais $2 \neq 3$.
3. $\{a, b{:}\mathbb{Z} \mid a + 1 = b : \langle a, b\rangle\}$ est une fonction.
4. $h = \{a, b{:}\mathbb{Z} \mid a = b^2 : \langle a, b\rangle\}$ n'est pas une fonction. Par exemple, $\langle 4, 2\rangle \in f$ et $\langle 4, -2\rangle \in f$.

Quand f est une fonction, on écrit habituellement $f.a = b$ plutôt que $\langle a, b\rangle \in f$ ou $a \ f \ b$.

Fonctions : notation, fonctions partielles

(12.51) Définition. Soit $f \subseteq B \times C$ une fonction. Si f est totale (c'est-à-dire si elle est une relation totale), on note son type de la manière suivante :

$$f{:}B \to C \ .$$

Si f n'est pas totale, on dit qu'elle est une *fonction partielle* et on note son type de la manière suivante :

$$f{:}B \rightsquigarrow C \ .$$

Une fonction totale est dite une *application*. Le terme *fonction* désigne une fonction totale ou partielle.

(12.52) Remarque. Pour d'autres auteurs (très nombreux), le terme *fonction* désigne une *fonction totale*.

Fonctions : bijectivité

(12.53) Définition. Une application injective et surjective est dite *bijective*.

(12.54) Exemple.

fonction	type	commentaire
$d.x = 1/x$	$d{:}\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$	non bijective, car partielle
$g.x = x - 3$	$g{:}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	application bijective
$h.x = 0$	$h{:}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	application non bijective, car non injective
$f.x = x$	$f{:}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$	application bijective (fonction identité)
$f.x = x$	$f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$	application non bijective (car non surjective)

Inverse d'une fonction

(12.55) Définition. Soit $f{:}B \to C$. La fonction $g{:}C \to B$ est dite *l'inverse* de f ssi

$$f(g.c) = c \quad \text{et} \quad g(f.b) = b\ , \quad \text{quels que soient } b{:}B \text{ et } c{:}C.$$

Autrement dit,

$$g \circ f = \mathbf{I}_C \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathbf{I}_B\ .$$

Si une fonction f a un inverse, elle est dite *inversible*.

Par exemple, la fonction $g{:}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g.x = x - 3$ est l'inverse de la fonction $f{:}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f.x = x + 3$.

Remarques :

1. On peut montrer que si g est l'inverse de f, alors $g = f^{-1}$.
2. Directement de la définition d'inverse, on voit que si g est l'inverse de f, alors f est l'inverse de g.

(12.56) Théorème : Soit $f{:}B \to C$. L'application f est inversible ssi elle est bijective.

(12.57) Remarque. Vous n'avez pas à étudier la composition de fonctions, notée $\bullet$ (page 281 du manuel), ni les inverses à gauche et à droite (page 283).

12.4 Relations d'ordre

(12.58) Définition. Une relation binaire ρ sur un ensemble B est dite une *relation d'ordre partiel* sur B, ou encore un *ordre partiel* sur B, ssi elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Si ρ est un ordre partiel sur B, la paire $\langle B, \rho \rangle$ est appelée un *ensemble partiellement ordonné*.

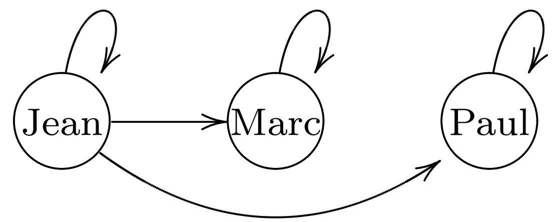
Une relation d'ordre compare les éléments d'un ensemble. Nous utiliserons le symbole $\preceq$ pour désigner un ordre partiel quelconque et nous écrirons indifféremment $a \preceq b$ ou $b \succeq a$.

(12.59) Exemple. Voici des exemples d'ensembles partiellement ordonnés.

1. $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$
2. $\langle \mathcal{P}\mathbb{N}, \subseteq \rangle$

3. $\langle\{\mathsf{Jean}, \mathsf{Marc}, \mathsf{Paul}\},$

$$\big\{\langle\mathsf{Jean}, \mathsf{Jean}\rangle, \langle\mathsf{Jean}, \mathsf{Marc}\rangle, \langle\mathsf{Jean}, \mathsf{Paul}\rangle, \langle\mathsf{Marc}, \mathsf{Marc}\rangle, \langle\mathsf{Paul}, \mathsf{Paul}\rangle\big\}\rangle$$



(12.60) Définition. Une relation binaire $\prec$ sur un ensemble B est dite une *relation d'ordre partiel strict* sur B, ou encore un *ordre partiel strict* sur B, ssi elle est transitive et irréflexive.

(12.61) Théorème : Si ρ est un ordre partiel sur un ensemble B, alors

$$\rho - \mathbf{I}_B$$

est un ordre partiel strict. Si ρ est un ordre partiel strict sur B, alors

$$\rho \cup \mathbf{I}_B$$

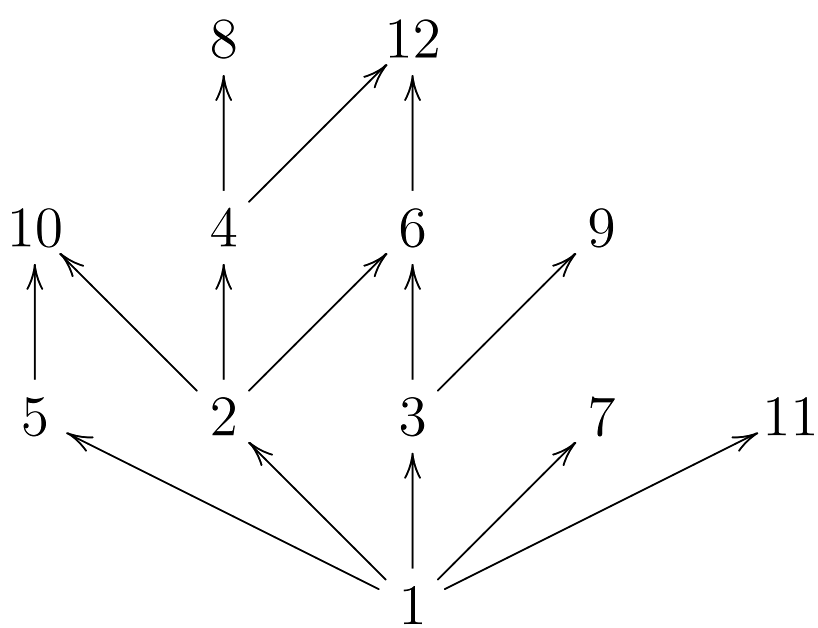
est un ordre partiel.

Pour passer d'un ordre partiel à un ordre partiel strict, il suffit donc d'enlever les couples de la forme $\langle b, b\rangle$. Pour passer d'un ordre partiel strict à un ordre partiel, il suffit d'ajouter les couples $\langle b, b\rangle$.

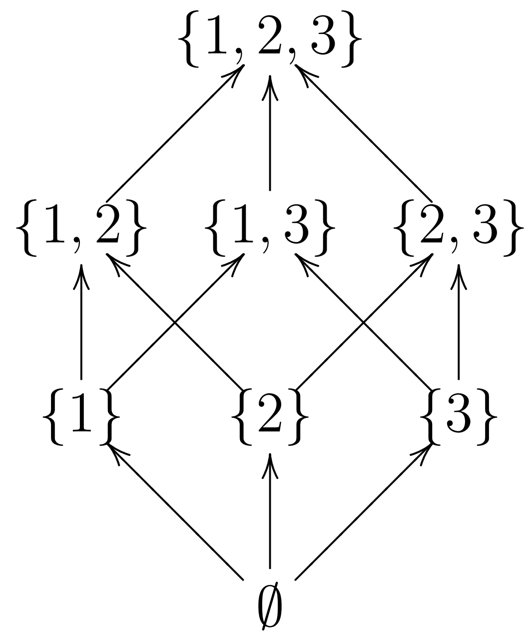
Par exemple, $<$ est un ordre partiel strict sur $\mathbb{Z}$ et $\subset$ est un ordre partiel strict sur $\mathcal{P}\mathbb{Z}$. Les ordres partiels correspondants sont $\leq$ et $\subseteq$.

Diagrammes de Hasse

On peut représenter les ensembles ordonnés $\langle B, \preceq \rangle$ finis et suffisamment petits par un diagramme appelé *diagramme de Hasse*. Les éléments de B sont les sommets du diagramme et certains couples de la relation sont représentés par des arcs (lignes entre les sommets). Si $b \prec c$, alors le sommet b est placé plus bas que le sommet c. Si $b \prec c$ et qu'il n'y a pas d'élément d tel que $b \prec d \prec c$, un arc est tracé entre b et c. Par exemple, voici les diagrammes de Hasse de deux ordres ($|$ est la relation « divise »)



$\langle \{i \mid 1 \leq i \leq 12\}, | \rangle$



$\langle \mathcal{P}\{1,2,3\}, \subseteq \rangle$

Ensembles totalement ordonnés

(12.62) Définition. Un ordre partiel $\preceq$ sur B est appelé un *ordre total* ssi

$$(\forall b, c \mid : b \preceq c \vee b \succeq c) \ ,$$

autrement dit, ssi deux éléments quelconques b et c sont comparables. Dans ce cas, la paire $\langle B, \preceq \rangle$ est appelée un *ensemble totalement ordonné* ou une *chaîne*.

Par exemple,

1. $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ est un ensemble totalement ordonné.
2. $\langle \mathcal{P}\mathbb{N}, \subseteq \rangle$ n'est pas totalement ordonné. Par exemple, on n'a ni $\{1\} \subseteq \{2\}$ ni $\{2\} \subseteq \{1\}$.