Preuve de $\#(\wp\varnothing) = 1$

Preuve:

$$
\begin{array}{ll}
 & \#(\wp\varnothing) \\
= & \qquad \langle\ (11.19)\ \text{avec}\ [S := \wp\varnothing]\ \rangle \\
 & (\sum x | x \in \wp\varnothing : 1) \\
= & \qquad \langle\ (11.32)\ \text{avec}\ [v, S := x, \varnothing]\ \rangle \\
 & (\sum x | x \subseteq \varnothing : 1) \\
= & \qquad \langle\ \text{lemme}\ \checkmark\ \text{(à la suite)}\ \rangle \\
 & (\sum x | x = \varnothing : 1) \\
= & \qquad \langle\ (6.21)\ \text{avec}\ [\star, E, P := \sum, \varnothing, 1], \\
 & \qquad\ \ \text{car}\ \neg\text{libre}(`x', `\varnothing')\ \rangle \\
 & 1
\end{array}
$$

Lemme ✓ : $x \subseteq \emptyset \ \equiv \ x = \emptyset$

Démonstration du lemme:

$$
\begin{array}{ll}
 & x \subseteq \emptyset \\
= & \qquad \langle \text{ (11.21) avec } [S, T := x, \emptyset] \ \rangle \\
 & (\forall y | y \in x : y \in \emptyset) \\
= & \qquad \langle \text{ (11.13) } \rangle \\
 & (\forall y | y \in x : \text{faux}) \\
= & \qquad \langle \text{ (7.4)b avec } [R, P := y \in x, \text{faux}] \ \rangle \\
 & (\forall y | : y \in x \wedge \text{faux} \equiv y \in x) \\
= & \qquad \langle \text{ (3.53) avec } [p := y \in x] \ \rangle \\
 & (\forall y | : \text{faux} \equiv y \in x) \\
= & \qquad \langle \text{ (3.3) avec } [p, q := faux, y \in x] \ \rangle \\
 & (\forall y | : y \in x \equiv \text{faux})
\end{array}
$$

$=$ $\langle$ (11.13) $\rangle$

$(\forall y| : y \in x \equiv y \in \emptyset)$

$=$ $\langle$ (11.8) avec $[S, T := x, \emptyset]$ $\rangle$

$x = \emptyset$

(11.56) $S \cap T = \emptyset \;\equiv\; (\forall x | : x \in S \Rightarrow x \notin T)$

Preuve de (11.56):

$$
\begin{array}{ll}
 & S \cap T = \emptyset \\
= & \qquad \langle \text{ (11.8) avec } [S, T := S \cap T, \emptyset] \rangle \\
 & (\forall x | : x \in S \cap T \equiv x \in \emptyset) \\
= & \qquad \langle \text{ (11.13) } \rangle \\
 & (\forall x | : x \in S \cap T \equiv \text{faux}) \\
= & \qquad \langle \text{ (11.29) avec } [v := x] \rangle \\
 & (\forall x | : x \in S \wedge x \in T \equiv \text{faux}) \\
= & \qquad \langle \text{ (3.18) avec } [p := x \in S \wedge x \in T] \rangle \\
 & (\forall x | : \neg(x \in S \wedge x \in T)) \\
= & \qquad \langle \text{ (3.48)a avec } [p, q := x \in S, x \in T] \rangle \\
 & (\forall x | : \neg(x \in S) \vee \neg(x \in T))
\end{array}
$$

$=$ $\langle$ (3.75) avec $[p, q := x \in S, \neg(x \in T)]$ $\rangle$

$(\forall x| : x \in S \Rightarrow \neg(x \in T))$

$=$ $\langle$ définition de $\notin$ $\rangle$

$(\forall x| : x \in S \Rightarrow x \notin T)$

(11.52) Monotonie de $\cap$: $S \subseteq T \wedge U \subseteq V \;\Rightarrow\; S \cap U \subseteq T \cap V$

Preuve de (11.52):

$S \subseteq T \wedge U \subseteq V$

$=$ ⟨ (11.21) directement
et (11.21) avec $[S, T := U, V]$ ⟩

$(\forall x | x \in S : x \in T) \wedge (\forall x | x \in U : x \in V)$

$=$ ⟨ (7.3) avec $[R, P := x \in S, x \in T]$
et (7.3) avec $[R, P := x \in U, x \in V]$ ⟩

$(\forall x | : x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (\forall x | : x \in U \Rightarrow x \in V)$

$=$ ⟨ (6.23) avec $[\star, R, P, Q := \wedge, \textsf{vrai}, x \in S \Rightarrow x \in T, x \in U \Rightarrow x \in V]$
chaque quantification est bien définie ⟩

$(\forall x | : (x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (x \in U \Rightarrow x \in V))$

$\Rightarrow$ ⟨ lemme £ (à la suite) avec $[p, q, r, s := x \in S, x \in T, x \in U, x \in V]$ ⟩

$(\forall x | : (x \in S \wedge x \in U) \Rightarrow (x \in T \wedge x \in V))$

$$
\begin{array}{ll}
= & \langle \text{ (7.3) avec } [R, P := x \in S \wedge x \in U, x \in T \wedge x \in V] \\
& \rangle \\
& (\forall x | x \in S \wedge x \in U : x \in T \wedge x \in V) \\
= & \langle \text{ (11.29) avec } [v, T := x, U] \\
& \quad \text{et (11.29) avec } [v, S, T := x, T, V] \ \rangle \\
& (\forall x | x \in S \cap U : x \in T \cap V) \\
= & \langle \text{ (11.21) avec } [S, T := S \cap U, T \cap V] \ \rangle \\
& S \cap U \subseteq T \cap V
\end{array}
$$

Lemme $\pounds$ **:** $(\forall x| : (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \;\Rightarrow\; (\forall x| : p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$

Preuve du lemme: On va d'abord montrer que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \;\Rightarrow\; (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s) \tag{1}$$

est un théorème. Pour y arriver, remarquons l'égalité suivante.

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \;\Rightarrow\; (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$

$=$ $\langle$ (3.81) avec $[p, q, r := (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), p \wedge r, q \wedge s]$ $\rangle$

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge p \wedge r \;\Rightarrow\; q \wedge s$

Donc si on réussit à démontrer que

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge p \wedge r \;\Rightarrow\; q \wedge s \tag{2}$$

est un théorème, on aura que (1) est un théorème.

$$
\begin{array}{ll}
& (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge p \wedge r \\
= & \qquad \langle \text{ (3.49) avec } [p, q := r \Rightarrow s, p \wedge r] \\
& \qquad\quad \text{et (3.49) avec } [p, q := p \Rightarrow q, p] \ \rangle \\
& p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge r \wedge (r \Rightarrow s) \\
= & \qquad \langle \text{ (3.82) directement} \\
& \qquad\quad \text{et (3.82) avec } [p, q := r, s] \ \rangle \\
& p \wedge q \wedge r \wedge s \\
= & \qquad \langle \text{ (3.49) directement} \\
& \qquad\quad \text{et (3.49) avec } [p, q := p \wedge r, s] \ \rangle \\
& q \wedge s \wedge p \wedge r \\
\Rightarrow & \qquad \langle \text{ (3.92)b avec } [p, q := q \wedge s, p \wedge r] \ \rangle \\
& q \wedge s
\end{array}
$$

Donc (2) est un théorème, donc (1) est un théorème.

En résumé,

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \;\Rightarrow\; (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$$

est un théorème.

Par le méthatéorème (7.23),

$$(\forall x| : (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \;\Rightarrow\; (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s))$$

est aussi un théorème.

Par (7.18) avec $[R, Q, P := \textsf{vrai}, (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), p \wedge r \Rightarrow q \wedge s]$, on a donc que

$$(\forall x| : (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \;\Rightarrow\; (\forall x| : p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$$

est un théorème et le lemme est démontré.