Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
GLO-66811

Danny Dubé
Automne 2008
Version : 23 octobre

Réponse à la série d'exercices #6
λ-calcul

1. (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(\lambda\mathrm{x.}\ (\lambda\mathrm{y.}\ (\mathrm{x}\ (\mathrm{y}\ \mathrm{z})))) &= \\
\mathrm{FV}(\lambda\mathrm{y.}\ (\mathrm{x}\ (\mathrm{y}\ \mathrm{z}))) - \{\mathrm{x}\} &= \\
(\mathrm{FV}(\mathrm{x}\ (\mathrm{y}\ \mathrm{z})) - \{\mathrm{y}\}) - \{\mathrm{x}\} &= \\
((\mathrm{FV}(\mathrm{x}) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{y}\ \mathrm{z})) - \{\mathrm{y}\}) - \{\mathrm{x}\} &= \\
((\{\mathrm{x}\} \cup \mathrm{FV}(\mathrm{y}) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{z})) - \{\mathrm{y}\}) - \{\mathrm{x}\} &= \\
((\{\mathrm{x}\} \cup \{\mathrm{y}\} \cup \{\mathrm{z}\}) - \{\mathrm{y}\}) - \{\mathrm{x}\} &= \\
\{\mathrm{z}\} &
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(\mathrm{x}\ (\lambda\mathrm{x.}\ (\mathrm{x}\ (\mathrm{y}\ (\lambda\mathrm{y.}\ \mathrm{y}))))) &= \\
\mathrm{FV}(\mathrm{x}) \cup \mathrm{FV}(\lambda\mathrm{x.}\ (\mathrm{x}\ (\mathrm{y}\ (\lambda\mathrm{y.}\ \mathrm{y})))) &= \\
\{\mathrm{x}\} \cup (\mathrm{FV}((\mathrm{x}\ (\mathrm{y}\ (\lambda\mathrm{y.}\ \mathrm{y})))) - \{\mathrm{x}\}) &= \\
\{\mathrm{x}\} \cup ((\mathrm{FV}(\mathrm{x}) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{y}\ (\lambda\mathrm{y.}\ \mathrm{y}))) - \{\mathrm{x}\}) &= \\
\{\mathrm{x}\} \cup ((\{\mathrm{x}\} \cup \mathrm{FV}(\mathrm{y}) \cup \mathrm{FV}(\lambda\mathrm{y.}\ \mathrm{y})) - \{\mathrm{x}\}) &= \\
\{\mathrm{x}\} \cup ((\{\mathrm{x}\} \cup \{\mathrm{y}\} \cup (\mathrm{FV}(\mathrm{y}) - \{\mathrm{y}\})) - \{\mathrm{x}\}) &= \\
\{\mathrm{x}\} \cup ((\{\mathrm{x}\} \cup \{\mathrm{y}\} \cup (\{\mathrm{y}\} - \{\mathrm{y}\})) - \{\mathrm{x}\}) &= \\
\{\mathrm{x}, \mathrm{y}\} &
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}((\lambda\mathrm{a.}\ (\mathrm{f}\ (\lambda\mathrm{x.}\ \mathrm{a})))\ ((\lambda\mathrm{c.}\ (\mathrm{f}\ \mathrm{c}))\ \mathrm{c})) &= \\
\mathrm{FV}(\lambda\mathrm{a.}\ (\mathrm{f}\ (\lambda\mathrm{x.}\ \mathrm{a}))) \cup \mathrm{FV}((\lambda\mathrm{c.}\ (\mathrm{f}\ \mathrm{c}))\ \mathrm{c}) &= \\
(\mathrm{FV}(\mathrm{f}\ (\lambda\mathrm{x.}\ \mathrm{a})) - \{\mathrm{a}\}) \cup \mathrm{FV}(\lambda\mathrm{c.}\ (\mathrm{f}\ \mathrm{c})) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{c}) &= \\
((\mathrm{FV}(\mathrm{f}) \cup \mathrm{FV}(\lambda\mathrm{x.}\ \mathrm{a})) - \{\mathrm{a}\}) \cup (\mathrm{FV}(\mathrm{f}\ \mathrm{c}) - \{\mathrm{c}\}) \cup \{\mathrm{c}\} &= \\
((\{\mathrm{f}\} \cup (\mathrm{FV}(\mathrm{a}) - \{\mathrm{x}\})) - \{\mathrm{a}\}) \cup ((\mathrm{FV}(\mathrm{f}) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{c})) - \{\mathrm{c}\}) \cup \{\mathrm{c}\} &= \\
((\{\mathrm{f}\} \cup (\{\mathrm{a}\} - \{\mathrm{x}\})) - \{\mathrm{a}\}) \cup ((\{\mathrm{f}\} \cup \{\mathrm{c}\}) - \{\mathrm{c}\}) \cup \{\mathrm{c}\} &= \\
\{\mathrm{f}, \mathrm{c}\} &
\end{aligned}$$

2.

$$((\lambda\mathrm{f.}\ (\lambda\mathrm{x.}\ ((\mathrm{f}\ \mathrm{f})\ \mathrm{x})))\ (\lambda\mathrm{f.}\ (\lambda\mathrm{x.}\ ((\mathrm{f}\ \mathrm{f})\ \mathrm{x}))))$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv C_1[\![(\lambda\text{f. }(\lambda\text{x. }((\text{f f) x})))]\!] \text{ où } C_1 = ((\lambda\text{f. }(\lambda\text{x. }((\text{f f) x}))) \; [\![\cdot]\!])\\
&\overset{\alpha}{\mapsto} C_1[\![(\lambda\text{g. }(\lambda\text{x. }((\text{g g) x})))]\!]\\
&\equiv ((\lambda\text{f. }(\lambda\text{x. }((\text{f f) x}))) \; (\lambda\text{g. }(\lambda\text{x. }((\text{g g) x}))))\\
&\equiv C_2[\![(\lambda\text{x. }((\text{g g) x}))]\!] \text{ où } C_2 = ((\lambda\text{f. }(\lambda\text{x. }((\text{f f) x}))) \; (\lambda\text{g. } [\![\cdot]\!]))\\
&\overset{\alpha}{\mapsto} C_2[\![(\lambda\text{y. }((\text{g g) y}))]\!]\\
&\equiv ((\lambda\text{f. }(\lambda\text{x. }((\text{f f) x}))) \; (\lambda\text{g. }(\lambda\text{y. }((\text{g g) y}))))
\end{aligned}
$$

3. Évaluation en ordre normal :

$$
\begin{aligned}
&\; (((\lambda\text{f. }(\lambda\text{g. (f f)})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))) \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\equiv C_1^{\text{n}}[\![(\lambda\text{f. }(\lambda\text{g. (f f)})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))]\!] \text{ où } C_1^{\text{n}} = ([\![\cdot]\!] \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\overset{\beta}{\mapsto} C_1^{\text{n}}[\![(\lambda\text{g. }(((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))))]\!]\\
&\equiv ((\lambda\text{g. }(((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))) \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\equiv C_2^{\text{n}}[\![((\lambda\text{g. }(((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))) \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))]\!] \text{ où } C_2^{\text{n}} = [\![\cdot]\!]\\
&\overset{\beta}{\mapsto} C_2^{\text{n}}[\![(((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))]\!]\\
&\equiv (((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))\\
&\equiv C_3^{\text{n}}[\![((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))]\!] \text{ où } C_3^{\text{n}} = ([\![\cdot]\!] \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))\\
&\overset{\beta}{\mapsto} C_3^{\text{n}}[\![(\lambda\text{x. x})]\!]\\
&\equiv ((\lambda\text{x. x}) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))\\
&\equiv C_4^{\text{n}}[\![((\lambda\text{x. x}) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))]\!] \text{ où } C_4^{\text{n}} = [\![\cdot]\!]\\
&\overset{\beta}{\mapsto} C_4^{\text{n}}[\![((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))]\!]\\
&\equiv ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))\\
&\equiv C_5^{\text{n}}[\![((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))]\!] \text{ où } C_5^{\text{n}} = [\![\cdot]\!]\\
&\overset{\beta}{\mapsto} C_5^{\text{n}}[\![(\lambda\text{x. x})]\!]\\
&\equiv (\lambda\text{x. x})
\end{aligned}
$$

Évaluation en ordre applicatif :

$$
\begin{aligned}
&\; (((\lambda\text{f. }(\lambda\text{g. (f f)})) \; ((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))) \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\equiv C_1^{\text{a}}[\![((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))]\!] \text{ où } C_1^{\text{a}} = (((\lambda\text{f. }(\lambda\text{g. (f f)})) \; [\![\cdot]\!]) \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\overset{\beta}{\mapsto} C_1^{\text{a}}[\![(\lambda\text{x. x})]\!]\\
&\equiv (((\lambda\text{f. }(\lambda\text{g. (f f)})) \; (\lambda\text{x. x})) \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\equiv C_2^{\text{a}}[\![((\lambda\text{f. }(\lambda\text{g. (f f)})) \; (\lambda\text{x. x}))]\!] \text{ où } C_2^{\text{a}} = ([\![\cdot]\!] \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\overset{\beta}{\mapsto} C_2^{\text{a}}[\![(\lambda\text{g. }((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x})))]\!]\\
&\equiv ((\lambda\text{g. }((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))) \; ((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z})))\\
&\equiv C_3^{\text{a}}[\![((\lambda\text{y. y}) \; (\lambda\text{z. z}))]\!] \text{ où } C_3^{\text{a}} = ((\lambda\text{g. }((\lambda\text{x. x}) \; (\lambda\text{x. x}))) \; [\![\cdot]\!])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\beta}{\longmapsto} && C_3^{\mathrm{a}}[\![(\lambda \mathrm{z.\ z})]\!] \\
&\equiv && ((\lambda \mathrm{g.}\ ((\lambda \mathrm{x.\ x})\ (\lambda \mathrm{x.\ x})))\ (\lambda \mathrm{z.\ z})) \\
&\equiv && C_4^{\mathrm{a}}[\![((\lambda \mathrm{g.}\ ((\lambda \mathrm{x.\ x})\ (\lambda \mathrm{x.\ x})))\ (\lambda \mathrm{z.\ z}))]\!] \text{ où } C_4^{\mathrm{a}} = [\![\cdot]\!] \\
&\overset{\beta}{\longmapsto} && C_4^{\mathrm{a}}[\![((\lambda \mathrm{x.\ x})\ (\lambda \mathrm{x.\ x}))]\!] \\
&\equiv && ((\lambda \mathrm{x.\ x})\ (\lambda \mathrm{x.\ x})) \\
&\equiv && C_5^{\mathrm{a}}[\![((\lambda \mathrm{x.\ x})\ (\lambda \mathrm{x.\ x}))]\!] \text{ où } C_5^{\mathrm{a}} = [\![\cdot]\!] \\
&\overset{\beta}{\longmapsto} && C_5^{\mathrm{a}}[\![(\lambda \mathrm{x.\ x})]\!] \\
&\equiv && (\lambda \mathrm{x.\ x})
\end{aligned}
$$

4. Premièrement, nous définissons la notion de profondeur d'un contexte. Soit P la fonction qui prend un contexte (de β-réduction, c'est-à-dire C^{n} ou C^{a}) et qui retourne la profondeur de l'emplacement distingué dans ce contexte. P est définie comme suit :

$$
\begin{aligned}
P([\![\cdot]\!]) &= 0 \\
P(C^{?}\ e_2) &= 1 + P(C^{?}) \\
P(e_1\ C^{?}) &= 1 + P(C^{?})
\end{aligned}
$$

Notez que la dernière équation inclut le cas où e_1 est une valeur.

Deuxièmement, démontrons le théorême pour les contextes C^{n}. Nous faisons une preuve par induction sur la profondeur du contexte.

Base. Soient e, C^{n} et e' tels que $e = C^{\mathrm{n}}[\![e']\!]$, $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et $P(C^{\mathrm{n}}) = 0$. Comme $P(C^{\mathrm{n}}) = 0$, alors $C^{\mathrm{n}} = [\![\cdot]\!]$, $e' = e$ et $\mathrm{FV}(e') = \emptyset$.

Hypothèse d'induction. Soient e, C^{n} et e' tels que $e = C^{\mathrm{n}}[\![e']\!]$, $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et $P(C^{\mathrm{n}}) \leq n$, alors $\mathrm{FV}(e') = \emptyset$.

Pas. Soient e, C^{n} et e' tels que $e = C^{\mathrm{n}}[\![e']\!]$, $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et $P(C^{\mathrm{n}}) = n + 1 \geq 1$. Comme $P(C^{\mathrm{n}}) > 0$, alors C^{n} est de la forme $(C_1^{\mathrm{n}}\ e_2)$. On peut donc écrire e comme $(e_1\ e_2)$ où $e_1 = C_1^{\mathrm{n}}[\![e']\!]$. Or, $\mathrm{FV}(e_1) = \emptyset$ car $\emptyset = \mathrm{FV}(e) = \mathrm{FV}(e_1) \cup \mathrm{FV}(e_2)$. Aussi, $P(C_1^{\mathrm{n}}) = n$. On peut donc utiliser l'hypothèse d'induction et conclure que $\mathrm{FV}(e') = \emptyset$.

Troisièmement, nous donnons une indication comment adapter la preuve pour C^{n} à C^{a}. Il suffit de considérer également, dans le pas, le cas où C^{a} est de la forme $(e_1\ C_2^{\mathrm{a}})$. L'argumentation est similaire.

5. Montrons le théorême pour les contextes C^{n} par induction sur la taille de e. La *taille* d'un λ-terme e est le nombre de noeuds présent dans l'arbre de syntaxe abstraite de e.

Pas : taille 1. Soit e tel que $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et e est de taille 1. Forcément, e ne peut être que de la forme x. Donc, $\mathrm{FV}(e) = \{\mathrm{x}\} \neq \emptyset$. Contradiction.

Pas : taille 2. Soit e tel que $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et e est de taille 2. Par sa taille, e est forcément de la forme $(\lambda \mathrm{x.\ x})$ — une variable étant plus petite et un appel étant plus gros. e est donc une valeur.

Hypothèse d'induction. Soit e tel que $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et e est de taille au plus n, alors soit e est une valeur, soit $\exists C^{\mathrm{n}}, \mathrm{x}, e_1, e_2$ tels que $e = C^{\mathrm{n}}[\![((\lambda \mathrm{x.}\ e_1)\ e_2)]\!]$.

Pas. Soit e tel que $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et e est de taille $n+1 \geq 3$. Considérons les trois formes "possibles" de e :

- $e = \mathrm{x}$: Contradiction à cause de la taille de e.
- $e = (\lambda\mathrm{x}.\ e_3)$: e est donc une valeur.
- $e = (e_4\ e_5)$: comme e_4 est de taille au plus $n-1$ et que $\mathrm{FV}(e_4) = \emptyset$ (voir réponse précédente), on peut appliquer l'hypothèse d'induction ; e_4 est alors l'une de deux choses :
  - e_4 est une valeur ; e_4 est forcément de la forme $(\lambda\mathrm{x}.\ e_1)$ (et non une variable) ; donc $e = C^{\mathrm{n}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ e_5)]\!]$ où $C^{\mathrm{n}} = [\![\cdot]\!]$.
  - sinon, on obtient C_1^{n}, x, e_1 et e_2 tels que $e_4 = C_1^{\mathrm{n}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ e_2)]\!]$; on a donc que $e = C^{\mathrm{n}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ e_2)]\!]$ où $C^{\mathrm{n}} = (C_1^{\mathrm{n}}\ e_5)$.

Pour les contextes C^{a}, il y a simplement plus de cas à considérer. Nous ne reprenons que le pas d'induction.

Pas. Soit e tel que $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$ et e est de taille $n+1 \geq 3$. Considérons les trois formes "possibles" de e :

- $e = \mathrm{x}$: contradiction à cause de la taille de e.
- $e = (\lambda\mathrm{x}.\ e_2)$: e est donc une valeur.
- $e = (e_3\ e_4)$: comme e_3 est de taille au plus $n-1$ et que $\mathrm{FV}(e_3) = \emptyset$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction ; e_3 est alors l'une de deux choses :
  - $e_3 = (\lambda\mathrm{x}.\ e_5)$; comme e_4 est aussi de taille au plus $n-1$ et que $\mathrm{FV}(e_4) = \emptyset$, alors on peut appliquer l'hypothèse à nouveau ; e_4 est alors l'une de deux choses :
    - $e_4 = v$; on a donc que $e = C^{\mathrm{a}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_5)\ v)]\!]$ où $C^{\mathrm{a}} = [\![\cdot]\!]$.
    - on obtient C_2^{a}, x, e_1 et v tels que $e_4 = C_2^{\mathrm{a}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ v)]\!]$; on a donc que $e = C^{\mathrm{a}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ v)]\!]$ où $C^{\mathrm{a}} = ((\lambda\mathrm{x}.\ e_5)\ C_2^{\mathrm{a}})$.
  - on obtient C_1^{a}, x, e_1 et v tels que $e_3 = C_1^{\mathrm{a}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ v)]\!]$; on a donc que $e = C^{\mathrm{a}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ v)]\!]$ où $C^{\mathrm{a}} = (C_1^{\mathrm{a}}\ e_4)$.