Université Laval
Faculté des sciences et de génie
Département d'informatique et de génie logiciel
GLO-66811

Danny Dubé
Automne 2008
Version : 23 octobre

Série d'exercices #6
λ-calcul

1. Calculez les variables libres des λ-termes suivants :
   (a) (λx. (λy. (x (y z))))
   (b) (x (λx. (x (y (λy. y)))))
   (c) ((λa. (f (λx. a))) ((λc. (f c)) c)) ;
2. À l'aide de contextes C et de quelques α-réductions, transformez cette expression de telle façon que chaque définition (ou λ-expression) introduise une variable de nom différent :
   ((λf. (λx. ((f f) x))) (λf. (λx. ((f f) x))))
3. Évaluez deux fois le λ-terme suivant, une fois en ordre normal et une fois en ordre applicatif :
   (((λf. (λg. (f f))) ((λx. x) (λx. x))) ((λy. y) (λz. z)))
   Donnez chaque étape en détail. C'est-à-dire qu'à chaque étape, on veut :
   $$e_1 \equiv C^?[\![e_1']\!] \overset{\beta}{\mapsto} C^?[\![e_2']\!] \equiv e_2$$
   et ainsi de suite.
4. Démontrez que si un λ-terme e n'a pas de variables libres, c'est-à-dire $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$, et si $\exists C^{\mathrm{n}}, e'$ tels que $C^{\mathrm{n}}[\![e']\!] = e$, alors $\mathrm{FV}(e') = \emptyset$. Faites une démonstration similaire pour C^{a}. (Voir "stratégies d'évaluation" dans les notes de cours.)
   Indice : faites la preuve par induction sur la "profondeur" du contexte C^{n} ou C^{a} ; définissez cette notion de "profondeur".
5. Démontrez que si un λ-terme e n'a pas de variables libres, alors soit e est une valeur (une fonction), soit $\exists C^{\mathrm{n}}, \mathrm{x}, e', e''$ tels que $C^{\mathrm{n}}[\![(\lambda\mathrm{x}.\ e')\ e'']\!] = e$. Similairement, démontrez que si $\mathrm{FV}(e) = \emptyset$, alors soit e est une valeur, soit $\exists C^{\mathrm{a}}, \mathrm{x}, e_1, v$ tels $e = C^{\mathrm{a}}[\![((\lambda\mathrm{x}.\ e_1)\ v)]\!]$.
   Indice : faites la preuve par induction ; vous pouvez utiliser le théorème de l'exercice précédent.
6. En vous basant sur les deux exercices précédents, montrez que si e n'a pas de variables libres, alors soit e est une valeur, soit il est possible de faire au moins une β-réduction sur e (possiblement en effectuant 0 ou plus α-réductions au préalable), que ce soit avec la stratégie d'évaluation en ordre normal ou avec la stratégie d'évaluation en ordre applicatif.